Министерство общего и профессионального образования Пермский национальный исследовательский политехнический университет

На правах рукописи

УДК 622.323

Пещеренко С.Н.

Лекции по механике сплошных сред

 Π ермь — 2016

Содержание

1	Ma	тематическое введение	4
	1.1	Векторы и тензоры	4
	1.2	Поток и циркуляция векторного поля	5
	1.3	Вероятность	7
	1.4	Задания для самостоятельной работы	7
2	Уш	оугость, основы	8
	2.1	Растяжение	8
	2.2	Кручение	9
	$\frac{-1}{2}$	Изгиб	10
	2.4	Задания для самостоятельной работы	11
2	Top		8
J	тер 2 1		.0 1
	ე.1 ე.ე		10
	ე.∠ ეე	Закон сохранения энергии или первое начало термодинамики	20 20
	ა.ა ე_4		52 54
	3.4	Аксиоматика и второе начало термодинамики	24 25
	3.5	Вычисление производных от термодинамических величин	25
	3.6	Задания для самостоятельной работы	27
4	Зак	он Гука З	30
	4.1	Тензор деформации	30
	4.2	Тензор напряжений	31
	4.3	Термодинамика деформированного тела	32
	4.4	Закон Гука	33
	4.5	Задания для самостоятельной работы	34
5	Рав	новесие деформированных твердых тел	35
	5.1	Однородные деформации	35
	5.2	Деформации с изменением температуры	36
	5.3	Уравнение равновесия	36
	5.4	Задания для самостоятельной работы	37
6	Рав	новесие стержней 4	{1
	6.1	Кручение стержней	41
	6.2	Изгиб стержней	11
	6.3	Устойчивость стержней	11
	6.4	Задания для самостоятельной работы	11
-	D	u	10
1	БИ(7 1	рация стержнеи 4	έ Ζ 40
	(.1	продольные волны	±Ζ 40
	(.2	Болны кручения	ŧΖ 40
	7.3	Примеры решения волнового уравнения	42 42
	7.4	Волны изгиба	42
	7.5	Задания для самостоятельной работы	42

8	Иде	еальная жидкость, основные уравнения	43
	8.1	Приближение сплошной среды	43
	8.2	Закон сохранения массы	43
	8.3	Уравнение Эйлера	44
	8.4	Гидростатика	45
	8.5	Уравнения движения во вращающейся системе отсчета	46
	8.6	Задания для самостоятельной работы	46
9	Иде	еальная жидкость, законы сохранения	48
	9.1	Закон Бернулли	48
	9.2	Теорема Томсона	49
	9.3	Закон сохранения энергии	50
	9.4	Закон сохранения импульса	51
	9.5	Задания для самостоятельной работы	51
10	Иде	еальная жидкость, потенциальное и вихревое течение	55
	10.1	Потенциальное течение	55
	10.2	Несжимаемая жидкость	56
		10.2.1 Основные модели	56
		10.2.2 Потенциальное обтекание тел	58
	10.3	Вихревое движение несжимаемой жидкости	60
	10.4	Задания для самостоятельной работы	61
11	Иде	еальная жидкость, типичные задачи	65
	11.1	Часть А	65
	11.2	Часть В	69
	11.3	Часть С	76
12	Изс	отермическое течение вязкой жидкости	79
	12.1	Уравнение Навье-Стокса	79
	12.2	Примеры течений с $(\boldsymbol{v} \nabla) \boldsymbol{v} = 0$	81
		12.2.1 Течение Куэтта	81
		12.2.2 Течение Пуазейля между параллельными пластинками	81
		12.2.3 Течение Пуазейля в трубе	82
		12.2.4 Течение Куэтта между вращающимися цилиндрами	82
	12.3	Закон подобия	83
	12.4	Задания для самостоятельной работы	84
13	При	имеры изотермических течений вязкой жидкости	90
	13.1	Течение Стокса	90
	13.2	Течение вблизи вращающегося диска	90
	13.3	Течение в диффузоре и конфузоре	90
	13.4	Течение вблизи колеблющейся стенки	90
	13.5	Задания для самостоятельной работы	90
14	Пог	раничный слой и отрыв течения	93
	14.1	Явление отрыва и след	93
	14.2	Ламинарный и турбулентный след при обтекании цилиндра	94
	14.3	Сила сопротивления и подъемная сила	94
	14.4	Погранслой на пластинке, качественные соображения	94

14.5 Задания для самостоятельной работы	<i>)</i> 4
15 Турбулентность, RANS подход 9 15.1 Введение 9 15.2 Уравнение Рейнольдса 9 15.3 Модели нулевого и первого порядка 9 15.4 Модели второго порядка 9 15.5 Модель погранслоя 10 15.6 Другие модели турбулентности 10	15)5)5)6)9)1)4
16 Турбулентное течение многофазных жидкостей, модель Лагранжа 10)7
16.1 Расчет движения твердых частиц в шнеке и осевом колесе 10)7
17 Турбулентное течение многофазных жидкостей, модель Эйлера 11 17.1 Расчет течения газожидкостной смеси 1 1	10 10
18 Теплопередача в вязких жидкостях 11	15
18.1 Диссипация энергии в вязкой жидкости	15
18.2 Уравнение переноса тепла	16
18.3 Закон подобия	16
18.4 Свободная конвекция	17
18.5 Задания для самостоятельной работы	18
19 Магнитная гилролинамика 11	21
19.1 Уравнения Максвелла в среде	21
19.2 Система уравнений магнитной гидродинамики	22
19.3 Течение Пуазейля (Гартмана)	24
19.4 Задания для самостоятельной работы	25
20 Лругие молели гилролинамики вязких жилкостей 1	77
20 1 Тепло- и массоперенос в пористых средах 15	27
20.1.1. Уравнение однофазной фильтрации 15	27
20.1.2 Уравнение переноса тепла 15	31
20.2 Неньютоновские жилкости	31
20.3 Смеси неограниченно растворимых компонент	32

1 Математическое введение

1.1 Векторы и тензоры

Вектор $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ — это тройка чисел, которая преобразуется как геометрические отрезки при поворотах систем координат и переносах начала системы координат.

Длина вектора определяется как длина отрезка, тогда по формуле Пифагора:

$$|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Видно, что длина вектора определяется через произведение его координат $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$, являющееся скаляром или инвариантом (не меняется при поворотах системы координат). Это привело к идее ввести операцию умножения вектора на самого себя или скалярного произведения:

$$a^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a_x \cdot a_x + a_y \cdot a_y + a_z \cdot a_z.$$

Докажем, что свойством инвариантности обладает и скалярное произведение разных векторов ($a \neq b$): $a \cdot b$. Пусть c = a + b, (Длина вектора, а значит и скалярное произведение векторов, не меняется при повороте и переносе начала системы координат.) тогда:

$$\boldsymbol{c}^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^2,$$

поскольку $\boldsymbol{a}^2 = inv, \, \boldsymbol{b}^2 = inv \, \boldsymbol{c}^2 = inv$, то и $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = inv$.

Скалярное произведение можно выразить через длины векторов и угол между ними φ . Пусть $\boldsymbol{a} = (a, 0, 0), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$, тогда

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab_x = ab\cos\varphi.$$

Получим правила преобразования 2D векторов при поворотах системы координат:

$$r = r',$$

$$ix + jy = i'x' + j'y',$$

$$x = (ii')x' + (ij')y' = \cos\varphi \ x' + \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)y'.$$

$$y = (ji')x' + (jj')y' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)x' + \cos\varphi \ y'.$$

Обозначив $x = x_1, y = x_2$, полученное выражение можно записать так

$$x_i = U_{ik} x'_k,$$

где

$$U_{ik} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$$

Векторы применяются в физике потому, что вид векторных уравнений не изменяется при повороте и переносе начала системы координат. Это упрощает запись физических законов.

Тензоры

Запишем преобразование координат вектора при повороте системы координат

$$A_i = U_{ik}A'_{ki}$$

по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до 3. Матрица поворотов U_{ik} обладает следующим свойством, вытекающим из инвариантности длины вектора при поворотах

$$A_i A_i = I_{ik} A'_k U_{ij} A'_j = A'_j A'_j, \quad \to \quad U_{ik} U_{ij} = \delta j k.$$

Составим из компонент векторов A_i и B_k билинейную комбинацию, тогда

$$A_i B_k = U_{in} A'_n U_{km} B'_m = U_{in} U_{km} A'_n B'_m.$$

Тензором второго ранга F_{ik} называется совокупность величин, преобразующихся при поворотах системы координат как билинейное произведение координат двух векторов

$$F_{ik} = U_{in}U_{km}F'_{nm}$$

Кроме скалярного произведения векторов, можно определить их векторное произведение $c = a \times b$. Направление $a \times b$ определяется правилом правой руки, или так:

$$c_i = e_{ijk} a_j b_k,$$

 e_{ijk} — антисимметричный единичный тензор ($e_{123} = 1, e_{213} = -1,$ и т.д.), длина $c = ab\sin\varphi$.

При вычислении двойного векторного произведения следует использовать следующее тождество

$$e_{ijk}e_{inm} = \delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn}, \quad e_{ijk}e_{nmk} = \delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jn}.$$

В 3-х мерном векторном пространстве можно определить только эти два типа произведений, обладающих свойством ассоциативности умножения.

Векторы полученные как векторное произведение называют аксиальными, обычные векторы — полярными. При инверсии всех осей координат проекции полярных векторов меняют знак, аксиальных — не меняют. Поэтому аксиальные векторы даже называют псевдовекторами. Также мы видели, что аксиальные векторы выражаются через тензоры.

1.2 Поток и циркуляция векторного поля

Функции определенные в пространстве или пространстве и времени, называются полями.

Пример скалярного поля: поле температур.

Пример векторного поля: поле скорости жидкости.

Для описания векторного поля достаточно задать всего две его характеристики: поток и циркуляцию. Определим их на примере стационарного векторного поля течения жидкости.

Поток жидкости сквозь некоторую поверхность

$$\Delta Q_i = v_{ni} \Delta a_i; \quad Q = \sum_i \Delta Q_i = \int v_n da = \int \boldsymbol{v} d\boldsymbol{a} = \int \boldsymbol{v} d\boldsymbol{a}$$



Рис. 1.1. Замкнутая поверхность S, ограничивающая объем V. Единичный вектор n — внешняя нормаль к элементу поверхности da, a h — вектор теплового потока сквозь элемент поверхности.

Теорема Гаусса

$$\oint_{S} \boldsymbol{h} d\boldsymbol{a} = \int_{V} \nabla \boldsymbol{h} dV.$$

Циркуляция жидкости. Если заморозить все, кроме контура, будет ли в нем циркулировать жидкость? Вычислим импульс жидкости, находящейся внутри трубки постоянного сечения ΔS , полученной протягиванием сечения вдоль этого контура

$$\rho\Delta S\sum_{i}v_{ti}\Delta l_{i}=\rho\Delta S\oint \boldsymbol{v}d\boldsymbol{l}.$$

Теорема Стокса

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{C} d\boldsymbol{l} = \int_{S} \nabla \times \boldsymbol{C} d\boldsymbol{S},$$

где *S* — любая поверхность, натянутая на замкнутый контур Г, см. рис. 1.2.



Рис. 1.2. Циркуляция вектора C по Γ равна поверхностному интегралу от нормальной компоненты вектора C

Полезная формула.

$$\int_{(1)}^{(2)} \nabla \psi d\boldsymbol{l} = \psi(2) - \psi(1).$$

Действительно

$$\nabla \psi = \mathbf{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad d\mathbf{l} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz,$$
$$\nabla \psi d\mathbf{l} = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = d\psi,$$
$$\int_{(1)}^{(2)} \nabla \psi d\mathbf{l} = \int_{(1)}^{(2)} d\psi = \psi(2) - \psi(1).$$

1.3 Вероятность

1.4 Задания для самостоятельной работы

Доказать

1.

$$\nabla \boldsymbol{r} = 3, \quad \nabla \times \boldsymbol{r} = 0, \quad \nabla \frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3},$$
2.

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c},$$
3.

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}),$$
4.

$$oldsymbol{v} imes (
abla imes oldsymbol{v}) = -rac{1}{2}
abla v^2 + (oldsymbol{v}
abla) oldsymbol{v}.$$

2 Упругость, основы

При описании деформации твердых тел под действием приложенных сил используется приближение сплошной среды. Тело разбивается на микрообъемы размера много большего, чем среднее расстояние между атомами, но много меньшего, чем характерный размер деформируемого тела. Такие микрообъемы содержат макроскопическое число атомов и взаимодействуют с соседними микрообъемами только через свои поверхности, т.к. радиус действия сил межатомного взаимодействия много меньше размера микрообъемов.

Деформации могут быть обратимыми (упругими) и необратимыми. Типичная величина обратимой деформации для металлов

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \sim 0.01 - 0.1\%.$$

Знакомство с методами механики деформируемых твердых тел начнем с рассмотрения нескольких простейших задач. Для их решения будем использовать уравнение Ньютона: произведение массы на ускорение равно силе, и интуитивные соображения. Теория упругости будет рассмотрена позже.

2.1 Растяжение

Закон Гука при упругих деформациях удлинение (или сжатие) Δl стержня пропорционально приложенной силе F:

$$F = SE\frac{\Delta l}{l}, \quad \rightarrow \quad \frac{F}{S} = \sigma = E\varepsilon,$$

которое сопровождается поперечным сжатием, см. рис. 2.1

$$\frac{\Delta d}{d} = -\nu \frac{\Delta l}{l},$$

 $\nu-$ коэффициент Пуассона, E-модуль упругости Юнга. Для стали $\nu=0.25-0.3,$ $E\approx 2\cdot 10^{11}$ Па.



Puc. 2.1.

Энергия

$$dU = Fd(\Delta l) = Fld\varepsilon = (Sl)E\varepsilon d\varepsilon,$$
$$U = VE\frac{\varepsilon^2}{2}, \quad \rightarrow \quad u = \frac{U}{V} = E\frac{\varepsilon^2}{2} = \frac{p\varepsilon}{2}$$

При малых деформациях диаграмма напряжение–деформации линейная. При больших деформациях — нелинейная, см. рис. 2.2: $\sigma_{\rm n}$ — предел пропорциональности, $\sigma_{\rm y}$ — предел упругости, $\sigma_{\rm T}$ — предел текучести, $\sigma_{\rm M}$ — предел прочности. При $\sigma < \sigma_{\rm n}$ расчеты ведут по закону Гука, при $\sigma > \sigma_{\rm T}$ деформация становится неоднородной, появляется "шейка см. рис. 2.3





Puc. 2.3.

2.2 Кручение

В качестве примера рассмотрим кручение цилиндрического стержня.

 Микрообъемы деформируются по механизму сдвига. Мысленно разобьем стержень на цилиндрические трубки. Каждая узкая полоска такой трубки, вырезанная плоскостями проходящими через ось вращения, при деформации кручения испытывает однородную деформацию сдвига. Напряжение τ и угол сдвига γ связаны законом Гука

$$\tau = \mu \gamma,$$

 $\mu-$ модуль сдвига. Работа при деформации сдвига

$$dA = F \cdot dl = (\tau S) \cdot (ld\gamma) = (Sl)\mu\gamma d\gamma, \quad \rightarrow \quad A = (Sl)\mu\frac{\gamma^2}{2}, \quad \rightarrow \quad u = \frac{A}{Sl} = \frac{\mu\gamma^2}{2} = \frac{\tau^2}{2\mu}$$

2. Перейдем к описанию деформации стержня в целом. При малых деформациях момент сил *M* и угол закрутки проволоки *φ* пропорциональны:

$$M = k\varphi,$$

работа

$$dA = M \cdot d\varphi, \quad \rightarrow \quad A = \frac{k\varphi^2}{2} = \frac{M^2}{2k}.$$

3. Сопоставим эти два подхода. При кручении цилиндрической трубки $M = \tau \cdot S \cdot r = \tau \cdot 2\pi r dr \cdot r$, а объем $V = l 2\pi r dr$, тогда

$$u = \frac{A}{V} = \frac{M^2}{2kV} = \frac{\pi r^3 \tau^2 dr}{kl}$$

следовательно

$$\frac{\tau^2}{2\mu} = \frac{\pi r^3 \tau^2 dr}{kl}, \quad \rightarrow \quad k = \frac{2\pi \mu}{l} r^3 dr.$$

Для сплошного цилиндра

$$k = \int_0^R k(r) \cdot dr = \frac{\pi \mu}{2l} R^4, \quad \to \quad M = \frac{\pi \mu R^4}{2l} \varphi.$$

4. Экспериментальная проверка. Коэффициент пропорциональности *k* для проволоки может быть измерен экспериментально. Действительно, крутильные колебания грузика на проволоке описываются уравнением

$$I\ddot{\varphi} = -k\varphi, \quad \rightarrow \quad \omega_0^2 = \frac{k}{I}, \quad \rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}},$$

где момент инерции

$$I = \rho \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r dr = 2\pi \rho \frac{R^4}{4}.$$

Нужно измерить период колебаний, а затем вычислить k.

2.3 Изгиб



Puc. 2.4.

Пусть l_0 — длина нейтральной линии. Если l_0 мало, то форма нейтральной линии близка к окружности и $l_0 = \alpha R$. Волокна выше ($\xi > 0$) и ниже ($\xi < 0$), см. рис. 2.4, имеют длину $l = (R + \xi)\alpha$. Тогда $\Delta l = l - l_0 = \xi\alpha$, а натяжения в волокнах

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l_0} = E \xi \frac{\alpha}{l_0} = E \frac{\xi}{R}.$$

Выше нейтральной линии волокна растянуты, ниже — сжаты. Суммарная сила, действующая на поперечное сечение балки равна нулю:

$$\int \sigma(\xi) dS = \frac{E}{R} \int \xi dS = 0.$$

Момент сил относительно оси перпендикулярной рис. в точке, где нейтральная линия пересекает поперечное сечение выделенного кусочка балки

$$M = \int \xi \sigma dS = \frac{E}{R} \int \xi^2 dS = \frac{E}{R} I, \quad \text{где} \quad I = \int \xi^2 dS,$$

I — момент инерции поперечного сечения бруса.

Момент сил не зависит от выбора точки на поперечном сечении бруса: например $x=a+\xi$

$$M = \int x\sigma dS = \frac{aE}{R} \int \xi dS + \int \xi \sigma dS = \int \xi \sigma dS.$$

Пусть уравнение нейтральной линии z(x), тогда

$$\frac{1}{R} = \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}},$$

т.к. $z'^2 \ll 1$, то

$$M = EIz''.$$



Puc. 2.5.

Пример: консольная балка, см. рис. 2.5, к свободному концу которой приложена сила *F*.

Мысленно разрежем балку на расстоянии x от закрепленного конца. Условия равновесия (сумма сил равна нулю) куска балки от свободного конца до выделенного сечения: $F_1 = F$, момент сил в сечении балки уравновешивается моментом F(l - x):

$$F(l-x) = EIz'', \quad \rightarrow \quad z' = \frac{F}{EI}x\left(l-\frac{x}{2}\right) + C,$$

C = 0, т.к. z'(0) = 0, поскольку этот конец балки закреплен. Далее

$$z = \frac{Fx^2}{2EI} \left(l - \frac{x}{3} \right) + C,$$

C = 0, т.к. y(0) = 0, итак

$$z = \frac{Fx^2}{2EI} \left(l - \frac{x}{3} \right).$$

2.4 Задания для самостоятельной работы

1. Стержень длиной *l*, находящийся в поле силы тяжести, подвешен за конец (см.рис. 2.6). Поперечное сечение стержня *S*, модуль Юнга *E*, плотность материала *ρ*. Найти распределение напряжений в стержне и его полное удлинение.

<u>Решение.</u> Рассмотрим два сечения недеформированного стержня с координатами x и $x + \Delta x$. После деформации координаты этих сечений будут равны: x + u(x) и $x + \Delta x + u(x + \Delta x)$. Относительная деформация

$$\varepsilon(x) = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{\partial u(x)}{\partial x}$$



Рис. 2.6. К задаче № 1

Тогда закон Гука запишется в следующем виде

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}.$$

В сечении с координатой xдействует растягивающая сила $F=\rho g S(l-x),$ следовательно

$$\frac{F}{S} = \rho g(l-x) = \sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{E} \rho g x \left(l - \frac{x}{2} \right) + c.$$

Поскольку u(0) = 0, то c = 0

$$u(x) = \frac{1}{E}\rho gx\left(l - \frac{x}{2}\right), \quad u(l) = \frac{g\rho l^2}{2E}.$$

2. На верхний торец стоящей вертикально на жесткой опоре колонны действует сила F_0 (см.рис. 2.7), равномерно распределенная по сечению верхнего торца. Как должна меняться площадь поперечного сечения колонны S(x), чтобы напряжения во всех точках были одинаковыми? Найти при этом общее уменьшение длины колонны.





<u>Решение.</u> Условие равенства напряжений в произвольном сечении *x* и на верхнем конце колонны имеет следующий вид:

$$\frac{F_0 + \rho g \int_x^l S(x) \, dx}{S(x)} = \frac{F_0}{S_m}, \quad \to \quad F_0 + \rho g \int_x^l S(x) \, dx = \frac{F_0}{S_m} S(x),$$

дифференцируя по x, получим

$$S'(x) = -\frac{\rho g S_m}{F_0} S(x),$$

откуда

$$S(x) = S_m \exp\left\{\frac{\rho g S_m}{F_0}(l-x)\right\}.$$

Общее уменьшение длины колонны

$$E\frac{\Delta l}{l} = \frac{F_0}{S_m}, \quad \to \quad \Delta l = \frac{F_0 l}{ES_m}$$

3. Для передачи момента M_0 используется полый вал с отношением внутреннего радиуса к внешнему, равным α . Предполагая, что максимально допустимое напряжение для материала вала есть τ_{max} , определить минимально возможный внешний радиус вала R и соответствующую ему массу единицы длины вала m.



Рис. 2.8. К задаче № 3

<u>Решение.</u> Связь углов сдвига ϑ и кручения φ , см. рис. 2.8, имеет следующий вид:

$$\vartheta = \frac{r\varphi}{L},$$

r — радиус цилиндра. Тогда напряжение сдвига

$$\tau = \mu \vartheta = \mu \frac{r\varphi}{L}.$$
(2.1)



Рис. 2.9. К задаче № 3

Рис. 2.10. К задаче № 3

Из рис. 2.9, 2.10 следует, что сила ΔG , вызывающая деформацию сдвига элемента цилиндрического слоя с площадью основания $\Delta l \Delta r$ равна

$$\Delta G = \tau \Delta l \Delta r.$$

А соответствующий момент сил

$$\Delta M = \Delta Gr = \tau r \Delta l \Delta r.$$

Момент сил, действующих на весь цилиндрический слой, получим заменив Δl на $2\pi r$, т.е.

$$\Delta M = 2\pi r^2 \tau \Delta r,$$

или, см. (2.1)

$$\Delta M = 2\pi r^2 \mu \frac{r\varphi}{L} \Delta r,$$

тогда момент сил, действующих на вал радиуса R с отверстием r

$$M = \int_{r}^{R} \Delta M \, dr = \frac{\pi \mu}{2L} (R^{4} - r^{4}), \quad \to \quad \varphi = \frac{2LM}{\pi \mu (R^{4} - r^{4})} = \frac{2LM}{\pi \mu R^{4}} \frac{1}{1 - \alpha^{4}}.$$

Согласно (2.1)

$$\tau_{max} = \mu \frac{R\varphi_{max}}{L} = \frac{\mu R}{L}\varphi_{max},$$

а поскольку

$$\varphi_{max} = \frac{2LM_0}{\pi\mu R^4} \frac{1}{1-\alpha^4},$$

 $_{\rm TO}$

$$\tau_{max} = \frac{\mu R}{L} \varphi_{max} = \frac{2M_0}{\pi R^3} \frac{1}{1 - \alpha^4},$$

откуда

$$R^{3} = \frac{2M_{0}}{\pi \tau_{max}(1 - \alpha^{4})}.$$

Масса единицы длины вала с отверстием

$$m = \rho \pi R^2 (1 - \alpha^2) = \rho \pi^{1/4} \left(\frac{2M_0}{\tau_{max}}\right)^{2/3} \frac{(1 - \alpha)^{1/3}}{(1 + \alpha)^{2/3}}.$$

4. Концы балки с погонным весом *p* покоятся на двух опорах, расстояние между которыми *L*. Найти форму балки и стрелу прогиба.

Рис. 2.11. К задаче № 4

<u>Решение.</u> Сила реакции опор N = Lp/2, см. рис. 2.11. Изгибающий момент в сечении x слагается из момента собственного веса части балки длинной x: $M_1 = px \cdot x/2$ и момента силы реакции опоры $M_2 = Nx$. Поэтому уравнение равновесия имеет следующий вид:

$$y'' = \frac{M_2 - M_1}{EI} = \frac{px}{2EI}(L - x).$$

Его решение, удовлетворяющее граничным условиям $y|_{x=0,L} = 0$ будет

$$y(x) = -\frac{px}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3).$$

Стрела прогиба

$$y(L/2) = -\frac{5}{384} \frac{pL^4}{EI}.$$

5. В условиях предыдущей задачи считать балку невесомой, но к ее середине приложить силу *F*.

<u>Решение.</u> Силы реакции N = F/2. Уравнение равновесия при $x \in [0, L/2]$:

$$EIy'' = Nx = \frac{Fx}{2}.$$

Граничные условия: y(0) = 0, y'(L/2) = 0. Решение

$$y(x) = \frac{Fx(4x^2 - 3L^2)}{48EI}, \quad y(L/2) = -\frac{FL^3}{48EI}.$$

6. Тонкий стержень длиной L подвергается сжатию с торцов силой F (рис. 2.12). Показать, что при достаточно малых F < F₁ стержень не будет иметь деформаций изгиба (устойчивость). Рассчитать критическую силу F₁ называемую силой Эйлера.



Рис. 2.12. К задаче № 6

<u>Решение.</u> Если стержень изогнется, то в сечении x возникнет момент сил M(x) = Fy(x), см рис. 2.12. Тогда уравнение равновесия

$$EIy'' = M(x), \quad \rightarrow \quad y'' + \alpha^2 y = 0, \quad \alpha^2 = \frac{F}{EI}.$$

Его решение

$$y(x) = A\sin\alpha x + D\cos\alpha x.$$

Из граничного условия y(0)=0 следует B=0. А из граничного условия y(L)=0

$$\sin \alpha L = 0, \quad \rightarrow \quad \alpha L = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots$$

или

$$\frac{F_n}{EI} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad \to \quad F_n = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}.$$

Наименьшая сила

$$F_1 = \frac{\pi^2 EI}{L^2},$$

при $F < F_1$ стержень прямолинеен.

7. Определить, изменение радиуса *R* вращающегося вокруг своей оси тонкостенного кругового цилиндра.

<u>Решение.</u> На сектор цилиндра $\Delta l = R\Delta \varphi$ действует центростремительная сила $F_c = \rho \Delta l S \omega^2 R = \rho \Delta \varphi S \omega^2 R^2$, где ρ — плотность материала, S — площадь сечения цилиндра плоскостью, содержащей его образующую и ось вращения (рис. 2.13). Эта сила является равнодействующей сил, растягивающих данный элемент:

$$F_c = \rho \Delta \varphi S \omega^2 R^2 = 2F \sin(\Delta \varphi/2),$$



Рис. 2.13. К задаче № 7

откуда имеем для напряжений

$$\frac{F}{S} = \rho \omega^2 R^2$$

Теперь по закону Гука

$$\frac{\Delta(2\pi R)}{2\pi R} = \frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} = \frac{\rho \omega^2 R^2}{E}, \quad \rightarrow \quad \Delta R = \frac{\rho \omega^2 R^3}{E}.$$

8. Найти смещение точек стержня, вращающегося вокруг одного из торцов с частотой $\omega.$

<u>Решение.</u> Центробежная сила, действующая на участок стержня от сечения x до конца стержня x = l) уравновешивается внутренними напряжениями

$$\int_{x}^{l} S\rho\omega^{2}x \, dx = S\rho\omega^{2} \frac{l^{2} - x^{2}}{2} = SE\frac{\partial u}{\partial x},$$

интегрируя, находим

$$u(x) = \frac{\rho \omega^2 x (l^2 - x^2/3)}{2E}.$$

9. Определить относительное смещение точек стержня, движущегося в направлении своей длины с постоянным ускорением .

<u>Решение.</u> Поскольку стержень движется ускоренно, с постоянным ускорением, то к нему приложена постоянная сила ρSla . Пусть эта сила приложена к переднему концу стержня. Направим ось x вдоль стержня, а ее начало совместим с задним концом стержня. Тогда на кусок стержня от его конца до сечения x действует сила $F = \rho Sxa$, которая обусловлена действием внутренних напряжений

$$\frac{F}{S} = \rho x a = E \frac{\partial u}{\partial x}$$

Интегрируя это уравнение, при услови
иu(0)=0,получим

$$u(x) = \frac{\rho a x^2}{2E}.$$

10. Стержень подвергается деформации растяжения, найти предельное значение коэффициента Пуассона ν .

<u>Решение.</u> В отсутствии деформации объем стержня $V = ld^2$. Объем деформированного стержня $V_1 = l_1 d_1^2$, т.к.

$$\begin{split} l_1 - l &= \varepsilon l, \quad \rightarrow \quad l_1 = l(1 + \varepsilon), \\ \frac{d_1 - d}{d} &= -\nu \varepsilon, \quad \rightarrow \quad d_1 = d(1 - \nu \varepsilon), \\ \frac{\Delta V}{V} &= \frac{V_1 - V}{V} = (1 + \varepsilon)(1 - \nu \varepsilon)^2 = \varepsilon (1 - 2\nu) > 0, \end{split}$$

т.к. при растяжении объем тела растет, следовательно $\nu \leq 0.5.$

3 Термодинамика

3.1 Температура и энтропия

Свойства равновесных состояний макроскопических систем, т.е. состоящих из большого числа атомом, можно изучать методами статистической механики или термодинамики. Термодинамический подход основывается на обобщении опытных данных. В нем нет анализа движения молекул и атомов, даже не используя представлений о молекулярном строении вещества. Только анализируются опытные факты. Такой подход называется феноменологическим.

1. Равновесное состояние и равновесные процессы

Из опыта мы знаем, что в равновесии состояние макроскопических систем определяются такими параметрами как: температура, давление, объем (если это газы); коэффициент поверхностного натяжения, площадь (если это пленка); длина, площадь поперечного сечения, приложенная сила, модуль Юнга и коэффициент Пуассона (если это стержень) и др.

Когда равновесия нет, то в системе протекают релаксационные процессы, приводящие систему в равновесное состояние. Тогда параметры состояния не определены. Время релаксации τ к равновесию может быть разным для разных параметров.

Процесс называют равновесным, если скорость изменения каждого макроскопического параметра X много меньше скорости релаксации самого медленного параметра Y, с самым большим временем релаксации τ_Y

$$\frac{\Delta X}{\Delta t} \ll \frac{\Delta Y}{\tau_Y}.$$

Для такого процесса все его параметры принимают определенное значение в каждый момент времени. В каждый момент времени система находится в равновесном состоянии. Между параметрами системы существует связь, например для газов: f(P, V, T) = 0, которую называют уравнением состояния.

2. Эмпирическая температура

Определим эмпирическую температуру τ , например, по изменению размеров тела при нагреве. Поместим пробное тело в термостат (макроскопическое тело с очень большой теплоемкостью). Это позволит зафиксировать эмпирическую температуру тела. Построим зависимость P(V) при $\tau = const$, т.е. $\phi(\tau|P, V) = 0$, см. рис. 3.1. Для идеального газа эта зависимость имеет вид PV = const.

Чуть изменим температуру термостата и снова измерим $\phi(\tau|P, V) = 0$. Получим функцию $\tau = \tau(P, V)$.

Это уравнение называется термическим уравнением состояния. Из опыта известно, что изотермы $\tau = \tau(P, V)$ не пересекаются.

3. Условная энтропия

Поместим тело в адиабат (сосуд с теплоизолированными стенками). Построим зависимость P(V) и пометим ее параметром σ . Для идеального газа эта зависимость имеет вид $PV^{\gamma} = const$, которая выполняется для одноатомных газов, а для 2-х атомных — в некотором интервале температур.



Puc. 3.1.

Puc. 3.2.

Подведем к пробному телу некоторое количество тепла (его нужно измерить) и снова построим зависимость P(V) при новом значении σ , т.е. $P = P(V, \sigma)$. Получим функцию $\sigma = \sigma(P, V)$, которую назовем условная энтропия, см. рис. 3.2.

Также зависимость $\sigma = \sigma(P, V)$ называют калорическим уравнением состояния. Из опыта известно, что адиабаты $\sigma = \sigma(P, V)$ не пересекаются.

4. **Абсолютные температура и энтропия** Согласно опытным данным, зависимости

$$\tau = \tau(P, V), \quad \sigma = \sigma(P, V),$$

устанавливают взаимно однозначную связь переменных P, V и τ, σ . Элементы площади поверхности при переходе от P, V к τ, σ преобразуются следующим образом:

$$dPdV = \left|\frac{\partial(P,V)}{\partial(\tau,\sigma)}\right| d\tau d\sigma = |D| d\tau d\sigma,$$

где

$$D = \frac{\partial(P, V)}{\partial(\tau, \sigma)} = \left| \begin{array}{cc} \partial P / \partial \tau & \partial P / \partial \sigma \\ \partial V / \partial \tau & \partial V / \partial \sigma \end{array} \right|$$

Определения эмпирической температуры и условной энтропии допускают замену τ, σ на произвольные монотонные функции $\tau' = f_1(\tau), \sigma' = f_2(\sigma)$, которые можно выбрать так, чтобы D = 1, т.е. плоскости P, V и τ, σ были равноправными

$$\frac{\partial(P,V)}{\partial(T,S)} = 1$$

Так определенные температура и энтропия называются абсолютными.

В основу данного определения положено условие взаимно однозначного соответствия переменных P, V и τ, σ , т.е. $D \neq 0, D^{-1} \neq 0$. Для некоторых макроско-пических систем эти условия не выполняются

Данное определение задает T(P, V) и S(P, V) с точностью до начала отсчета и масштаба и требует, чтобы были заданы термическое и калорическое уравнения состояния.

5. Пример расчета абсолютных T и S для идеального газа

$$T = T(PV) = T(x), \quad S = S(PV^{\gamma}) = S(y),$$

$$\frac{\partial(T,S)}{\partial(P,V)} = \left| \begin{array}{cc} \partial T/\partial P & \partial T/\partial V \\ \partial S/\partial P & \partial S/\partial V \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} T'V & T'P \\ S'V^{\gamma} & S'P\gamma V^{\gamma-1} \end{array} \right| = T'S'(\gamma-1)y = 1,$$

$$T'(x) = \frac{1}{S'(y)(\gamma - 1)y}, \quad \rightarrow \quad T' = \frac{1}{R}, \quad \rightarrow \quad S' = \frac{R}{(\gamma - 1)y},$$
$$T = \frac{x}{R} + const = \frac{PV}{R} + \theta, \quad P = \frac{R(T - \theta)}{V},$$
$$S = \frac{R}{\gamma - 1} \ln y + C = \frac{R}{\gamma - 1} \ln PV^{\gamma} + C =$$
$$= S_0 + \frac{R}{\gamma - 1} \ln \frac{PV^{\gamma}}{P_0 V_0^{\gamma}} = S_0 + \frac{R}{\gamma - 1} \ln \frac{(T - \theta)V^{\gamma - 1}}{(T_0 - \theta)V_0^{\gamma - 1}}.$$

3.2 Закон сохранения энергии или первое начало термодинамики

Изменение энергии макроскопического тела dE происходит из-за передачи ему некоторого количества теплоты δQ и совершении телом работы δA :

$$dE = \delta Q + \delta A.$$

Работа совершаемая макроскопическим телом равна

$$\delta A = f dx = -P dV,$$

где давление P определяется состоянием тела, например является функцией объема и температуры, поэтому

$$\delta A \neq dA = \frac{\partial A}{\partial T} dT + \frac{\partial A}{\partial V} dV,$$

т.е. δA не является дифференциалом, а работа не является функцией состояния

$$A = -\int_{(1)}^{(2)} P(T, V) dV \neq A(1) - A(2),$$

и зависит от способа совершения работы.

В случае адиабатического процесса ($\delta Q = 0$) изменение энергии системы равно

$$dE_S = \delta A_S = -PdV_S.$$

Тогда для неадиабатического, т.е. произвольного процесса

$$dE = -PdV + \alpha dS = \frac{\partial E}{\partial V}dV + \frac{\partial E}{\partial S}dS.$$

Здесь dE это дифференциал функции E(V, S), тогда

$$\frac{\partial \alpha}{\partial V} = -\frac{\partial P}{\partial S}, \rightarrow \left(\frac{\partial \alpha}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V, \rightarrow \frac{\partial (\alpha, S)}{\partial (V, S)} = \frac{\partial (P, V)}{\partial (V, S)}, \rightarrow \frac{\partial (\alpha, S)}{\partial (P, V)} = 1.$$

Поскольку

$$\frac{\partial(T,S)}{\partial(P,V)} = 1,$$

то

$$\frac{\partial(\alpha,S)}{\partial(P,V)} = \frac{\partial(\alpha,S)}{\partial(T,S)} = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial T}\right)_S = 1,$$

откуда

$$\alpha = T + \phi(S).$$

При V = const получим

$$dE = TdS + \phi(S)dS,$$

откуда видно, что $\phi(S)$ определяет начало отсчета энергии. Положив $\phi(S) = 0$ получим, что закон сохранения энергии имеет следующий вид:

$$dE = TdS - PdV. (3.1)$$

Тепло, подводимое к системе $\delta Q = T dS$ записано в форме аналогичной $\delta A = -P dV$. В тепловых процесса изменение энтропии S аналогично изменению объема при совершении системой работы. Можно говорить, что подвод и отвод тепла связан с изменением термодинамической координаты S.

Отдельные подсистемы макроскопической системы можно считать не взаимодействующими, поскольку среди молекул, принадлежащих разным подсистемам, могут взаимодействовать только молекулы, находящиеся на их границах (т.к. силы межмолекулярного взаимодействия короткодействующие). Число молекул находящихся на границах подсистем $\sim L^2$, в объеме $\sim L^3$. Доля молекул находящихся на границах пропорциональна L^{-1} и при $L \to \infty$ стремится к нулю. Поэтому макроскопические, т.е. достаточно большие подсистемы можно считать не взаимодействующими, тогда их энергия аддитивная величина:

$$E = E_1 + E_2,$$

а их микросостояния изменяются практически независимо друг от друга.

Аддитивной величиной является и объем макросистемы, тогда из (3.1) следует аддитивность энтропии:

$$S = S_1 + S_2.$$

Примечание. Приведем определение и перечислим свойства якобиана $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$:

$$\begin{split} \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= \left| \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right|, \\ \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= -\frac{\partial(v,u)}{\partial(x,y)}, \\ \frac{\partial(u,y)}{\partial(x,y)} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_y, \\ \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= \frac{\partial(u,v)}{\partial(t,s)} \frac{\partial(t,s)}{\partial(x,y)} \end{split}$$

3.3 Тепловые процессы

Теплоемкость. Рассмотрим процесс нагревания макроскопической системы, в дальнейшем тела. Количество тепла необходимое для нагревания тела на 1К называют теплоемкостью

$$C = \frac{\delta Q}{\delta T} = T \frac{dS}{dT}$$

Поскольку δQ не является полным дифференциалом, то теплоемкость C зависит от условий нагревания тела. Таких условий может быть бесконечно много, например: V = const, P = const, константой является любая комбинация V и P.

Теплоемкость может быть отрицательным числом, если например, тело получает тепло и одновременно расширяется, затрачивая на работу больше энергии, чем получает.

Вычислим C_V и C_P идеального газа, для чего воспользуемся ранее полученным выражением для энтропии:

$$S = S_0 + \frac{R}{\gamma - 1} \ln \frac{PV^{\gamma}}{P_0 V_0^{\gamma}} = S_0 + \frac{R}{\gamma - 1} \ln \frac{(T - \theta)V^{\gamma - 1}}{(T_0 - \theta)V_0^{\gamma - 1}},$$

тогда

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{\gamma - 1}\frac{T}{T - \theta}, \quad C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}\frac{T}{T - \theta}.$$

Поскольку, в соответствии с экспериментальными данными, $(C_V, C_P) = const$, то $\theta = 0$.

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}, \quad C_P = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}, \quad \rightarrow \quad \frac{C_P}{C_V} = \gamma, \quad C_P - C_V = R,$$

 $R = kN_A = 8.31 \text{ Дж/K}.$

Круговые процессы. Из рис. 3.3 следует, что работа совершаемая системой за один цикл, равна площади, ограниченной замкнутой кривой.

Из рис. 3.4 следует, что за один цикл система получает тепло численно равное площади, ограниченной замкнутой кривой.



Puc. 3.3.

Puc. 3.4.

Из закона сохранения энергии

$$\delta Q = dE + \delta A, \quad \rightarrow \quad \oint \delta Q = \oint dE + \oint \delta A, \quad \rightarrow \quad Q = A$$

Площади, ограниченные замкнутыми кривыми на рис. 3.3 и 3.4 равны, а контуры нужно обходить в одну и ту же сторону, как показано на рисунках.

Цикл Карно. Если тепловая машина имеет один нагреватель и один охладитель с постоянными температурами, то процессы подвода и отвода тепла должны быть изотермическими. Поэтому единственно возможный круговой тепловой процесс в координатах T - S имеет вид прямоугольника. В координатах V - P кривые разные для разных рабочих тел, см. рис. 3.5, 3.6. Этот тепловой процесс называется циклом Карно.



Puc. 3.5.

Puc. 3.6.

В цикле тепло Q_1 подводится, Q_2 отводится

$$Q_1 = T_1(S_2 - S_1) > 0, \quad Q_2 = T_2(S_1 - S_2) < 0, \quad \eta_C = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_1}.$$
 (3.2)



Puc. 3.7.

Основные свойства цикла Карно

- КПД цикла Карно η_C не зависит от выбора рабочего вещества.
- КПД тем больше, чем меньше T_2/T_1 .

- $\eta_C < 1$ и $\eta_C \rightarrow 1$ при $T_2 \rightarrow 0$.
- $\eta_C > \eta$ любого цикла в котором максимальная температура нагревателя равна T_2 цикла Карно и минимальная температура охладителя равна T_1 цикла Карно.

Обозначим, см. рис. 3.7, $q_1 = S_{aAb} + S_{bBc}$, $q_2 = S_{cCd} + S_{dDa}$, тогда

$$\eta_C = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1},$$

$$\eta = \frac{(Q_1 - q_1) - |Q_2 + q_2|}{Q_1 - q_1} = \frac{\eta_C Q_1 - q_1 - |q_2|}{Q_1 - q_1} = \eta_C - \frac{q_1}{Q_1 - q_1} (1 - \eta_C) - \frac{|q_2|}{Q_1 - q_1} < \eta_C.$$

3.4 Аксиоматика и второе начало термодинамики

Основные законы термодинамики (точнее термостатики) равновесных процессов получены. В описанном выше подходе была использована следующая система аксиом:

1. существование температуры и энтропии (принципы температуры и энтропии) и условие их калибровки:

$$\frac{\partial(T,S)}{\partial(P,V)} = 1;$$

2. закон сохранения энергии (первое начало термодинамики):

$$dE = TdS - PdV,$$

а условие калибровки является условием того, что правая часть этого выражения является полным дифференциалом;

 упомянем также принцип Нернста или третье начало термодинамики: энтропия любой равновесной термодинамической системы при T = 0 является величиной постоянной, не зависящей от ни от каких термодинамических величин (давления, объема, напряженностей полей и др.).

Исторически первой была предложена другая аксиоматика. На основе опытных данных было установлено ограничение на тепловые процессы, получившее название "второе начало термодинамики". Ниже приведены две эквивалентные формулировки таких ограничений.

Формулировка Клаузиуса: невозможен процесс, единственным результатом которого была бы передача тепла от холодного тела к горячему.

Формулировка Томпсона: невозможен процесс, единственным результатом которого было бы совершение работы за счет теплоты, взятой от одного какого-либо тела (тогда произведенную работу можно было бы целиком, трением, превратить в тепло и передать термостату с более высокой температурой.

Применение этих формулировок к равновесным процессам приводит к доказательству существования функции состояния системы — энтропии, которая связана с количеством тепла соотношением

$$\delta Q = T dS.$$

Аксиомы термодинамики доказываются средствами статистической механики.

3.5 Вычисление производных от термодинамических величин

Мы установили, что идеальный газ описывается следующими термодинамическими (макроскопическими) параметрами: *S*, *T*, *V*, *P*. И имеет место закон сохранения внутренней энергии, записанный в терминах термодинамических параметров:

$$dE = \delta Q + \delta A = TdS - PdV. \tag{3.3}$$

Чтобы вычислить внутреннюю энергию E(S, V) следует выполнить интегрирование, а значит, нужен явный вид функций T(S, V), P(S, V).

На практике для детализации слагаемых в правой части, задаются уравнения состояния

- f(P, V, T) = 0, называемое термическим уравнением, позволяет записать выражение для работы δA ;
- калорическое уравнение, или зависимость внутренней энергии от любой пары из *P*, *V*, *T*, определяет *dE*, т.е. с учетом (3.3), *δQ*.

Так для идеального газа эти уравнения имеют следующий вид:

- термическое уравнение $PV = \nu RT$;
- калорическое $dE = \nu C_V dT$, C_V теплоемкость моля.

Убедимся, что этих двух уравнений состояния достаточно, чтобы проинтегрировать уравнение сохранения энергии. Вычислим энтропию и энергию идеального газа:

$$dS = \frac{1}{T}dE + \frac{P}{T}dV = \frac{1}{T}\nu C_V dT + \frac{\nu R}{V}dV, \quad \to \quad S = S_0 + \nu C_V \ln \frac{T}{T_0} + \nu R \ln \frac{V}{V_0},$$

или

$$\frac{S-S_0}{\nu C_V} = \frac{R}{C_V} \ln \frac{V}{V_0} + \ln \frac{T}{T_0}, \quad T = T_0 \left\{ \frac{S-S_0}{\nu C_V} \right\} \left(\frac{V_0}{V} \right)^{R/C_V}$$
$$E = \nu C_V T = const \cdot \exp\left\{ \frac{S}{\nu R} \right\} V^{-R/C_V}.$$

Мы использовали полную информацию о термодинамической системе. Получили две функциональные зависимости S(T, V), E(S, V). Однако на практике могут понадобится другие функции двух переменных, связывающие E, S, T, P, V или частные производные от этих функций. Например

$$C_P = \left(\frac{\delta Q}{\partial T}\right)_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$$
 или $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S$.

Для их вычисления используются три основных приема.

1. В законе сохранения энергии в качестве термодинамических параметров можно взять не S и V, а другие переменные

$$dE = TdS + SdT - SdT - PdV, \quad d(E - TS) = dF = -SdT - PdV, \quad F = E - TS,$$

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V,\tag{3.4}$$

аналогично

$$H = E + PV, \quad dH = TdS + VdP,$$

$$\Phi = E - TS + PV, \quad d\Phi = -SdT + VdP.$$

Функции $E(S,T), H(S,P), F(T,V), \Phi(T,P)$ называют термодинамическими потенциалами, по аналогии с потенциальной энергией в механике, производные от которой определяют силы $\nabla U = -\mathbf{F}$.

2. Из уравнения сохранения энергии dE = TdS - PdV находят производные энергии (можно и других термодинамических потенциалов) по термодинамическим переменным. Например

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P,\tag{3.5}$$

использовали (3.4). Или еще

$$\left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - P\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T,$$
$$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_P = C_P - P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P.$$

3. Метод якобианов. Основное его тождество

$$\frac{\partial(T,S)}{\partial(P,V)} = 1,$$

следует из выражения для дифференциала энергии:

$$dE = TdS - PdV \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 E}{\partial S \partial V} = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V,$$
$$\frac{\partial (T,S)}{\partial S \partial V} = \frac{\partial (P,V)}{\partial S \partial V} = \frac{\partial (T,S)}{\partial S \partial V}$$

ИЛИ

$$\frac{\partial(T,S)}{\partial(V,S)} = -\frac{\partial(P,V)}{\partial(S,V)} \quad \to \quad \frac{\partial(T,S)}{\partial(P,V)} = 1,$$

откуда

$$\partial(T,S) = \partial(P,V).$$

Метод якобианов удобно применять для "изгнания"
из формул энтропии (выражения с энтропией сложнее измерять в экспериментах, т.к.
нет энтропиеметров — приборов для измерения энтропии). Делается это с помощью основного термодинами
ческого тождества $\partial(T,S) = \partial(P,V)$ и следствий из него

$$\partial(S,V) = \frac{\partial(S,V)}{\partial(T,V)} \partial(T,V) = \frac{C_V}{T} \partial(T,V),$$
$$\partial(S,P) = \frac{\partial(S,P)}{\partial(T,P)} \partial(T,P) = \frac{C_P}{T} \partial(T,P).$$

3.6 Задания для самостоятельной работы

1. Процедура вычисления функции по ее дифференциалу

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = A(x,y)dx + B(x,y)dy, \quad \text{где} \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x},$$

тогда

$$z(x,y) = \int_{x_0}^x A(x,y)dx + C(y),$$

откуда

$$B(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial A}{\partial y} dx + \frac{dC}{dy} = \int_{x_0}^x \frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{dC}{dy} = B(x,y) - B(x_0,y) + \frac{dC}{dy},$$

следовательно

$$\begin{split} \frac{dC}{dy} &= B(x_0, y), \quad \text{M} \quad C(y) = \int_{y_0}^y B(x_0, y) dy + const, \\ z(x, y) &= \int_{y_0}^y B(x_0, y) dy + \int_{x_0}^x A(x, y) dx + z(x_0, y_0). \end{split}$$

Аналогичным образом можно получить

$$z(x,y) = \int_{x_0}^x A(x,y_0) dx + \int_{y_0}^y B(x,y) dy + z(x_0,y_0),$$

оба раза вычисляем криволинейный интеграл в плоскости X, Y от точки x_0, y_0 до x, y, но по разным путям. Видно, что результат интегрирования не зависит от пути, т.е.

$$\oint dz = 0.$$

2. Следствия из третьего начала термодинамики.

(а) Любая теплоемкость при T = 0 равна нулю.

Разложение энтропии в ряд Тейлора при $T \sim 0$ имеет вид (x — параметр, считающийся постоянным при вычислении теплоемкости C_x):

$$S = S_0 + A(x)T^n, \quad C_x(T) = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_x = nA(x)T^{n-1}, \quad C_x(T=0) = 0.$$

(b) При T=0верно следующее равенство: $(\partial V/\partial T)_P=0$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{\partial (V, P)}{\partial (T, P)} = \frac{\partial (S, T)}{\partial (T, P)} = -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = 0,$$

т.к. при T = 0 энтропия S не зависит от P.

(c) При T = 0 верно также и следующее равенство: $(\partial P/\partial T)_V = 0$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{\partial (P, V)}{\partial (T, V)} = \frac{\partial (S, T)}{\partial (T, V)} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = 0,$$

т.к. при T = 0 энтропия S не зависит от V.

(d) Абсолютный нуль (T = 0) недостижим. Для цикла Карно из (3.2) следует

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{Q_1}{T_1} = \frac{|Q_2|}{T_2},$$

причем в любом равновесном круговом процессе $\Delta S = \oint dS = 0$. Поэтому, если положим $T_2 = 0$ и $T_1 \neq 0$, то получаем противоречие. Следовательно нельзя считать $T_2 = 0$, абсолютный нуль недостижим.

3. Ограничение на вид калорического уравнения. Если задано термическое уравнение состояния, то можно сделать определенные выводы о виде калорического уравнения. Рассмотрим функцию E(T, V)

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T dV = C_V dT + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T dV.$$

Отуда, успользуя (3.5), получаем

$$dE = C_V dT + \left[T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P\right] dV.$$

В общем случае C_V является функцией T, V. Выражение в квадратных скобках можно вычислить в явном виде, если использовать термическое уравнение состояния. Следовательно, функция $C_V(T, V)$ должна удовлетворять следующему уравнению

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = \frac{\partial^2 E}{\partial T \partial V} = \frac{\partial}{\partial T} \left[T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P \right]_V = T \left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_V.$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_T = -T \left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_P$$

4. Рост энтропии в процессах выравнивания.

Пусть замкнутая термодинамическая система состоит из нескольких подсистем находящихся в равновесном состоянии и пусть между подсистемами равновесие отсутствует. Покажем, что процессы выравнивания сопровождаются ростом энтропии.

<u>Выравнивание температуры</u>. Подсистемы имеют температуры T_1 и $T_2, T_1 > T_2$. Тогда первая подсистема будет отдавать тепло: $\delta Q_1 = -T_1 dS_1 = -\delta Q$, вторая получает: $\delta Q_2 = T_2 dS_2 = \delta Q$.

Энтропия системы в целом, как величина аддитивная, равна:

$$dS = dS_1 + dS_2 = \delta Q \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) > 0.$$

<u>Выравнивание давления</u>. Пусть подвижный поршень в теплоизолированном недеформируемом цилиндре разделяет подсистемы имеющие равные температуры T, но разные давления $P_1 > P_2$. Тогда первая подсистема будет расширяться производя работу $\delta A = (P_1 - P_2)dV$, предполагаем, что процесс медленный и потому обратимый.

Поскольку системы в целом изолирована и ее энергия сохраняется, то внутри системы будет выделяться тепло $\delta Q = \delta A$. Процесс сопровождается увеличением энтропии:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{P_1 = P_2}{T} dV > 0.$$

Пусть теперь процесс необратимый. Тогда в силу изолированности системы и равновесности начального и конечного состояний E(S(P)) = const. Изменение энтропии определяется различием давления в начальном и конечном состояниях и не зависит от связывающего их процесса.

5. Физические свойства термодинамических потенциалов.

(a) Тепло, переданное системе δQ , и работа δA , совершенная над системой могут быть выражены через термодинамические потенциалы. Поскольку:

$$dE = \delta Q + \delta A, \quad \delta Q = T dS, \quad \delta A = -P dV,$$

 $_{\rm TO}$

при
$$V = const$$
, $\delta Q = dE$,
 $P = const$, $\delta Q = d(E + PV) = dH$,
 $T = const$, $\delta A = d(E - TS) = dF$,
 $S = const$, $\delta Q = dE$.

(b) Пусть есть другие термодинамические переменные λ_i , тогда

$$dE = TdS - PdV + \sum \Lambda_i \lambda_i.$$

Если λ_i немного изменяются, то E, H, F, Φ также испытывают небольшие изменения:

$$(\delta E)_{SV} = (\delta H)_{SP} = (\delta F)_{TV} = (\delta \Phi)_{TP}.$$

(c) Когда (T, V) = const во всем объеме, то $dE = \delta Q$. Пусть в системе протекают необратимые процессы (например, химические реакции), а значит, ее энтропия растет, тогда

$$\delta Q < T dS, \rightarrow d(E - TS) = dF < 0,$$

свободная энергия уменьшается и достигает минимального значения в состоянии теплового равновесия.

(d) Когда (T, P) = const во всем объеме, то $d(E + PV) = \delta Q$. Пусть в системе протекают необратимые процессы (например, химические реакции), а значит, ее энтропия растет, то

$$\delta Q < T dS, \quad \rightarrow \quad d(E + PV - TS) = d\Phi < 0,$$

термодинамический потенциал уменьшается и достигает минимального значения в состоянии теплового равновесия.

Последние два свойства поучительны тем, что в состоянии устойчивого равновесия системы минимальна не энергия, а F и Φ .

4 Закон Гука

4.1 Тензор деформации

Пусть (x_1, x_2, x_3) координаты точек недеформированного тела, тогда после деформации эти точки будут иметь координаты $(x_1+u_1, x_2+u_2, x_3+u_3)$, где $u_i, i = 1, 2, 3$ — вектор деформации. Ясно, что **и** полностью определяет деформацию.

Расстояние между точками недеформированного тела

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^3 = dx_i dx_i = dx_i^2,$$

по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до 3. Расстояние между точками деформированного тела

$$dl'^{2} = (dx_{i} + du_{i})^{2} = \left(dx_{i} + \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{k}}dx_{k}\right)^{2} = dx_{i}^{2} + 2\frac{\partial u_{i}}{\partial x_{k}}dx_{i}dx_{k} + \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{k}}\frac{\partial u_{i}}{\partial x_{l}}dx_{k}dx_{l}.$$

Поскольку

$$2\frac{\partial u_i}{\partial x_k}dx_i dx_k = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)dx_i dx_k$$

то

$$dl'^2 = dl^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)dx_i dx_k = dl^2 + 2u_{ik}dx_i dx_k,$$

где

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \tag{4.1}$$

 $u_{ik} = u_{ki}$ — тензор деформации.





Поворот системы координат определяется 3 параметрами - углами Эйлера, см. рис. 4.1. Поэтому из 6 компонент симметричного тензора u_{ik} можно любые 3 сделать равными нулю. Это означает, например, что u_{ik} можно сделать диагональным в любой точке твердого тела (в одной, произвольно выбранной, не во всех сразу). Тогда в этой системе координат деформация состоит в растяжении или сжатии по трем осям:

$$dl'^{2} = (\delta_{ik} + 2u_{ik})dx_{i}dx_{k} = (1 + 2\hat{u}_{11})dx_{11} + (1 + 2\hat{u}_{22})dx_{22} + (1 + 2\hat{u}_{33})dx_{33} +$$

а относительная деформация, которая обычно бывает малой величиной, просто равна диагональному элементу тензора деформации:

$$\frac{dx'_i - dx_i}{dx_i} = \sqrt{1 + 2\hat{u}_{ii}} - 1 \ll 1, \quad \to \quad \hat{u}_{ii} \ll 1.$$

Следовательно, обычно $u_{ik} \ll 1$, поэтому в (4.1) можно пренебречь квадратичным слагаемым:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

При этом вектор деформации u_i не обязательно должен быть малым. Например, при изгибе длинного и тонкого стержня вектор деформации может быть не мал, относительные же деформации, а значит и u_{ik} , обычно малы.

Вычислим изменение элемента микробъема при деформации в системе координат, где тензор деформаций диагонален:

$$dV' = dx'_1 dx'_2 dx'_3 = (1 + \hat{u}_{11}) dx_1 (1 + \hat{u}_{22}) dx_2 (1 + \hat{u}_{33}) dx_3 = (1 + \hat{u}_{11} + \hat{u}_{22} + \hat{u}_{33}) dx_1 dx_2 dx_3, \quad \Rightarrow \\ \frac{dV' - dV}{dV} = \hat{u}_{11} + \hat{u}_{22} + \hat{u}_{33} = \sum_{i=1}^3 \hat{u}_{ii} = \sum_{i=1}^3 u_{ii} = u_{ii},$$

видим, что относительная деформация микрообъема равна сумме диагональных элементов.

Мы использовали свойство инвариантности суммы диагональных элементов тензора второго ранга: при повороте системы координат сумма диагональных элементов не меняется, см. задачу №1 в конце этой лекции.

4.2 Тензор напряжений

В недеформированном теле атомы находятся в положениях равновесия, сумма сил действующих на каждый атом равна нулю. Поэтому равна рулю у суммарная сила, действующая на любое сечение тела.

При деформации в теле возникают силы, стремящиеся вернуть атомы в исходные положения. Радиус действия этих сил порядка межатомных расстояний, т.е. в рамках макроскопического подхода равен нулю. Поэтому можно считать, что эти силы действуют только на поверхность микрообъма.

Выделим в деформированном теле объем V и вычислим суммарную силу действующую на атомы. Внутри объема атомы неподвижны, поэтому сумма действующих на них сил равна нулю. Поэтому суммарная сила, действующая на объем равна интегралу по поверхности от некоторого тензора A_{ik} :

$$\int F_i \, dV = \oint A_{ik} \, df_k,$$

по теореме Гаусса

$$\int \nabla \boldsymbol{B} \, dV = \oint \boldsymbol{B} \, d\boldsymbol{f},$$

следовательно

$$\int F_i \, dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \, dV = \oint \sigma_{ik} \, df_k,$$

 σ_{ik} — имеет размерность силы деленной на площадь и называется тензором напряжений. Видно, что $\sigma_{ik} df_k - i$ -ая компонента силы. Поскольку

$$\sigma_{1k} df_k = \sigma_{11} df_1 + \sigma_{12} df_2 + \sigma_{13} df_3,$$

то σ_{11} это компонента силы вдоль оси 1, действующая на единичную площадку перпендикулярную оси 1, σ_{12} это компонента силы вдоль оси 1, действующая на единичную площадку перпендикулярную оси 2, а σ_{13} это компонента силы вдоль оси



1, действующая на единичную площадку перпендикулярную оси 3, см. рис. 4.2 (мы учли, что вектор df_i направлен в сторону внешней нормали к поверхности).

Следовательно,

$$\int F_i \, dV = \oint \sigma_{ik} \, df_k,$$

это сила действующая на выделенный объем со стороны окружающих его частей тела в направлении внешней нормали к объему, т.е. фактически это сила, действующая со стороны выделенного объема на окружающие его поверхности.

Можно показать, см. задачу №2 в конце лекции, что $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$.

Условие равновесия микрообъема тела (единицы объема) имеет вид $F_i = 0$ или

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$$

Если тело находится в поле сил тяжести, то $F_i + \rho g_i = 0$

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0. \tag{4.2}$$

Пусть **Р** — внешняя сила, действующая на единицу поверхности тела. Эта сила уравновешивается внутренними напряжениями действующими в теле, тогда

$$P_i df - \sigma_{ik} df_k = 0, \quad \to \quad \sigma_{ik} n_k = P_i,$$

 n_k — единичный вектор внешней нормали.

4.3 Термодинамика деформированного тела

Вычислим работу A, совершаемую телом. В каждом его микрообъеме работа равна $\delta A = F_i \delta u_i$, где $F_i = \partial \sigma_{ik} / \partial x_k$, а δu_i — перемещение. Тогда

$$A = \int \delta A \, dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i \, dV = \int \left(\frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik} \delta u_i) - \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} \right) dV =$$
$$= \oint \sigma_{ik} \delta u_i \, df_k - \int \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} \, dV = -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \right) dV =$$
$$= -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dV = -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \delta u_{ik} \, dV.$$

Учли, что интеграл по поверхности равен нулю, если считать тело бесконечным и выбрать поверхность интегрирования на бесконечности, где напряжения равны нулю $\sigma_{ik} = 0$. При преобразовании подинтегрального выражения в оставшемся интеграле по объему, воспользовались симметрией тензора напряжений $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$. Поэтому

$$\delta A = -\sigma_{ik} \delta u_{ik}.$$

Согласно закону сохранения энергии

$$dE = \delta Q - \delta A = TdS + \sigma_{ik}du_{ik}.$$

Если на тело действуют только напряжения сжатия, т.е. $\sigma_{ik} = -P\delta_{ik}$, например тело погружено в газ, то

$$dE = TdS - Pdu_{ii} = TdS - PdV,$$

получаем закон сохранения энергии в привычной форме.

Для свободной энергии деформированного твердого тела получим

$$dF = d(E - TS) = -SdT + \sigma_{ik}du_{ik}, \quad \rightarrow \quad \sigma_{ik} = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}\right)_T.$$
(4.3)

4.4 Закон Гука

Согласно (4.3), свободная энергия твердого тела $F = F(T, u_{ik})$. Если в процессе деформирования температура тела не меняется, то раскладывая в ряд Тейлора, получим

$$F = F(u_{ik}) = F_0 + \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \bigg|_{u_{ik}=0} u_{ik} + \frac{\lambda}{2} u_{ii}^2 + \mu u_{ik}^2$$

Поскольку $\partial F/\partial u_{ik}|_{u_{ik}=0}$ — это напряжения в недеформированном теле, которые равны нулю, а также выбирая начало отсчета свободной энергии так, чтобы $F_0 = 0$, получим для квадратичных слагаемых разложения F в ряд Тейлора:

$$F = \frac{\lambda}{2}u_{ii}^2 + \mu u_{ik}^2.$$

Разложение скалярной функции F по квадратичным комбинациям u_{ik} имеет два слагаемых, т.к. из компонент u_{ik} можно составить только две, комбинации квадратичные по u_{ik} и инвариантные при поворотах системы координат, т.е. являющиеся скалярами.

Тензор деформаций удобно представить в виде двух слагаемых:

$$u_{ik} = \left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right) + \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll},$$

первое слагаемое описывает сдвиговые деформации (в которых меняется форма тела, а объем сохраняется $U_{ll} = 0$), второе описывает деформацию всестороннего сжатия (когда форма сохраняется, а объем меняется $u_{ll} \neq const$). Тогда

$$F = \mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right)^2 + \frac{K}{2} u_{ll}^2, \tag{4.4}$$

 μ — модуль сдвига, K — модуль всестороннего сжатия. Поскольку свободная энергия имеет минимальное значение в состоянии термодинамического равновесия, то если тело подвергнуть деформации сдвига, получим $\mu > 0$, всестороннего сжатия — K > 0.

Из (4.3) и (4.4) найдем зависимость σ_{ik} от u_{ik} , для чего продифференцируем (4.3)

$$dF = 2\mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll} \right) d \left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll} \right) + Ku_{ll}du_{ll} = 2\mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll} \right) du_{ik} + Ku_{ll}du_{ll},$$

т.к. произведение δik на скобку дает ноль. Окончательно

$$dF = \left[2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right) + Ku_{ll}\delta_{ik}\right]du_{ik},$$

тогда из (4.3) получим

$$\sigma_{ik} = 2\mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right) + K u_{ll} \delta_{ik}.$$

Откуда

$$\sigma_{ii} = 2K u_{ll},\tag{4.5}$$

тогда

$$u_{ik} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma_{ll} \right) + \frac{1}{9K} \delta_{ik} \sigma_{ll}.$$
(4.6)

Модуль всестороннего сжатия K можно вычислить методами термодинамики. При всестороннем сжатии $\sigma = -P\delta_{ik}$, или считая давление малым $\sigma = -P\delta_{ik}$, тогда из (4.5)

$$u_{ll} = -\frac{dP}{K}, \quad \rightarrow \quad \frac{dV}{V} = -\frac{dP}{K}, \quad \rightarrow \quad \frac{1}{V}\frac{dV}{dP} = -\frac{1}{K}.$$

Поскольку деформация протекает при постоянной температуре, то

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T.$$

4.5 Задания для самостоятельной работы

- 1. Доказать, что при повороте системы координат сумма диагональных компонент тензора u_{ik} не меняется.
- 2. Доказать, что $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$.
- 3. Доказать, что среди квадратичный выражений составленных из компонент u_{ik} только два скаляра: u_{ii}^2 и u_{ik}^2 .
- 4. Доказать, что $K = \lambda + 2\mu/3$.
- 5. Доказать, что из (4.4) и (4.6) следует

$$u_{ik} = \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}}\right)_T.$$

5 Равновесие деформированных твердых тел

5.1 Однородные деформации

Рассмотрим два типа деформаций.

1. Простое растяжение стержня.

Пусть стержень расположен вдоль оси z и к его концам приложены силы, растягивающие его в противоположные стороны и равномерно распределенные по поверхности концов. Обозначим через p силу действующую на единицу поверхности.

Будем считать, что деформация однородна по длине и сечению стержня, тогда $u_{ik} = const, \ \sigma_{ik} = const.$

На любой поверхности стержня выполняется равенство: $p_i df = \sigma_{ik} df_k$, или $p_i = \sigma_{ik} n_k$.

Тогда на боковой поверхности $\sigma_{ik}n_k = 0, \mathbf{n} = \{n_x, n_y, 0\}$, т.е. $\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{yy} = 0.$

На торцах $\sigma_{zk}n_k = p$ откуда $\sigma_{zz} = p$. Тогда из

$$u_{ik} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma_{ll} \right) + \frac{1}{9K} \delta_{ik} \sigma_{ll},$$

следует

$$u_{xx} = u_{yy} = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{1}{3}\sigma_{zz} \right) + \frac{1}{9K}\sigma_{zz} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K} \right) p,$$
$$u_{zz} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{zz} - \frac{1}{3}\sigma_{zz} \right) + \frac{1}{9K}\sigma_{zz} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{3K} \right) p.$$

Полученные выражения принято записывать в следующем виде

$$u_{xx} = u_{yy} = -\sigma u_{zz}, \quad u_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} = \frac{p}{E}$$

где
 σ — называют коэффициентом Пуассона,
аE — модулем Юнга

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{3K - 2\mu}{3K + \mu}, \quad E = \frac{9K\mu}{3K + \mu}.$$
$$\mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}, \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\sigma)}.$$

Видно, что $\sigma_{min} = \sigma(K = 0) = -1, \ \sigma_{max} = \sigma(\mu = 0) = 0.5.$

Закон Гука, связь σ_{ik} и u_{ik} , принимает следующий вид:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma} \left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll} \delta_{ik} \right), \quad u_{ik} = \frac{1}{E} \left[(1+\sigma)\sigma_{ik} - \sigma \delta_{ik} \sigma_{ll} \right].$$

2. **Сжатие стержня**, боковые стороны которого закреплены так, что поперечные размеры не меняются.

Из всех u_{ik} не равна нулю только одна компонента: u_{zz} , поэтому

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{1+\sigma} \left(u_{zz} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{zz} \right) = \frac{E}{1+\sigma} \frac{1-\sigma}{1-2\sigma} u_{zz},$$
$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{E}{1+\sigma} \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{zz}.$$
5.2 Деформации с изменением температуры

Состояние тела в отсутствии внешних сил и некоторой температуре T_0 будем считать недеформированным. Изменение температуры $T - T_0$ будем считать малым, тогда разложение свободной энергии в ряд Тейлора имеет следующий вид

$$F = F_0 - K\alpha(T - T_0)u_{ll} + \mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right)^2 + \frac{K}{2}u_{ll}^2,$$

откуда

$$\sigma_{ik} = -K\alpha(T - T_0)\delta_{ik} + Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right),$$

или

$$\sigma_{ik} = -K\alpha(T - T_0)\delta_{ik} + \frac{E}{1 + \sigma}\left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma}u_{ll}\delta_{ik}\right).$$

Предположим, что тело недеформировано, а его температура одна и та же во всех точках и равна T_0 . Затем тело нагрели до T, также одинаковой во всех точках. Тело останется недеформированным и $\sigma_{ik} = 0$, поэтому

$$\sigma_{ik} = 0 = -K\alpha(T - T_0)u_{ll}\delta_{ik} + Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right),$$
$$-K\alpha(T - T_0)\cdot 3 + Ku_{ll}\cdot 3 + 2\mu(u_{ll} - u_{ll}) = 0, \quad \rightarrow \quad u_{ll} = \alpha(T - T_0), \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta V}{V} = \alpha(T - T_0),$$

видно, что α — объемный коэффициент теплового расширения.

5.3 Уравнение равновесия

Получим уравнение для вычисления вектора деформаций твердого, находящегося в состоянии равновесия с приложенным к телу стационарным внешним воздействием. Подставив

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma} \left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll} \delta_{ik} \right), \quad u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \tag{5.1}$$

в уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0,$$

получим

$$\frac{E}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} + \rho g_i = 0,$$

или

$$\nabla^2 \boldsymbol{u} + \frac{1}{1 - 2\sigma} \nabla(\nabla \boldsymbol{u}) = -\rho \boldsymbol{g} \frac{2(1 + \sigma)}{E}, \qquad (5.2)$$

или

$$\nabla(\nabla \boldsymbol{u}) - \frac{1 - 2\sigma}{2(1 - \sigma)} \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) = -\rho \boldsymbol{g} \frac{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}{E(1 - \sigma)},$$
(5.3)

было использовано тождество $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) = \nabla (\nabla \boldsymbol{u}) - \nabla^2 \boldsymbol{u}.$

Если в процессе деформирования меняется температура тела, то

$$\sigma_{ik} = -K\alpha(T - T_0)\delta_{ik} + \frac{E}{1 + \sigma}\left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma}u_{ll}\delta_{ik}\right).$$

$$\begin{split} &\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} - K\alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} = \\ &= \frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} - \frac{E\alpha}{3(1-2\sigma)} \frac{\partial T}{\partial x_i}, \end{split}$$

и уравнение равновесия, в отсутствии внешних полей, имеет такой вид

$$\frac{3(1-\sigma)}{1+\sigma}\nabla(\nabla \boldsymbol{u}) - \frac{3(1-2\sigma)}{2(1-\sigma)}\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) = \alpha\nabla T.$$
(5.4)

Задания для самостоятельной работы 5.4

При решении задач нам будет требоваться выражение тензора деформаций через тензор напряжений, закон Гука:

$$u_{ik} = \frac{1}{E} \left[(1+\sigma)\sigma_{ik} - \sigma\delta_{ik}\sigma_{ll} \right].$$
(5.5)

Также приведем, для справки, выражения компонент тензора деформаций через производные от вектора смещения. В сферических координатах:

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r},$$
$$u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{u_{\theta}}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{u_r}{r},$$
$$2u_{\theta\varphi} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \theta} - u_{\varphi} \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \varphi},$$
$$2u_{r\theta} = \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta},$$
$$2u_{\varphi r} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{\varphi}}{r}.$$

В цилиндрических координатах:

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$
$$2u_{z\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial z}, \quad 2u_{zr} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r},$$
$$2u_{r\varphi} = \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{\varphi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}.$$

Задачи

1. Определить деформацию стержня, стоящего вертикально в поле тяжести.

~

Решение. Пусть начало координат находится в плоскости нижнего основания стержня, а ось z направлена по оси стержня, тогда уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{xk}}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yk}}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zk}}{\partial x_k} = \rho g.$$

Граничные условия на верхнем основании z = L:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0,$$

на боковой поверхности

$$\sigma_{zz} \neq 0$$
, остальные $\sigma_{ik} = 0$.

Тогда

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x_k} = \rho g, \quad \sigma_{zz}|_{z=L} = 0, \quad \to \quad \sigma_{zz} = \rho g(z-L).$$

Учитывая (5.5) получим

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{yy} = -\frac{\sigma}{E}\sigma_{zz} = \frac{\sigma}{E}\rho g(L-z), \\ u_{zz} &= \frac{1}{E}[(1+\sigma)\sigma_{zz} - \sigma\sigma_{zz}] = \frac{\rho g(z-L)}{E}, \quad u_{xy} = u_{xz} = u_{yz} = 0. \end{aligned}$$

Находим компоненты вектора деформации

$$\begin{split} u_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad u_x(x=0) = 0, \quad \rightarrow \quad u_x = \frac{\sigma}{E} \rho g(L-z)x, \\ u_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad u_y(y=0) = 0, \quad \rightarrow \quad u_x = \frac{\sigma}{E} \rho g(L-z)y, \\ u_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad u_z(z=0) = 0, \quad \rightarrow \quad u_z = \frac{\rho g}{2E} \left((L-z)^2 - L^2 + \sigma (x^2 + y^2) \right), \\ \text{в последнем равенстве учли, что } u_{xz} = u_{yz} = 0. \end{split}$$

- 2. Определить деформацию полого шара
 $(R_2>R_1)$ внутри которого давление $p_1,$ а снаруж
и $p_2.$

Решение.

Деформация \boldsymbol{u} везде направлена по радиусу и является функцией только r,поэтому $\nabla\times\boldsymbol{u}=0$ и из (5.3) следует

$$\nabla(\nabla \boldsymbol{u}) = 0, \quad \rightarrow \quad \nabla \boldsymbol{u} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \boldsymbol{u} = const = 3a, \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{u} = ar + \frac{b}{r^2}.$$

Поскольку

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad u_{\theta\varphi} = u_{r\theta} = u_{r\phi} = 0,$$

то

$$u_{rr} = a - \frac{2b}{r^3}, \quad \rightarrow \quad u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = a + \frac{b}{r^2}.$$

Из (5.1) получаем

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma} \left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll} \delta_{ik} \right), \quad \rightarrow$$
$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1+\sigma} \left(u_{rr} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} (u_{\theta\theta} + u_{\varphi\varphi}) \right) = \frac{E}{1-2\sigma} a - \frac{2E}{1+\sigma} \frac{b}{r^3}.$$

Используя граничные условия

$$\sigma_{rr}|_{R_1} = p_1, \quad \sigma_{rr}|_{R_2} = -p_2,$$

получим

$$a = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{r_2^3 - R_1^3} \frac{1 - 2\sigma}{E}, \quad b = \frac{R_1^3 R_2^3 (p_1 - p_2)}{r_2^3 - R_1^3} \frac{1 + \sigma}{2E}.$$

Если $p_1 = p, p_2 = 0$, то

$$\sigma_{rr} = \frac{pR_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \left(1 - \frac{R_2^3}{r^3} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \left(1 + \frac{R_2^3}{2r^3} \right).$$

Если дополнительно $h = R_2 - R_1 \ll R$, то

$$\sigma_{rr} = \frac{p}{2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR}{2h}, \quad u = \frac{pR^2(1-\sigma)}{2Eh}.$$

Если $R_1 = R, R_2 = \infty, p_1 = 0, p_2 = p$, то

$$\sigma_{rr} = -p\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p\left(1 + \frac{R^3}{r^3}\right).$$

3. Определить деформацию полой цилиндрической трубы внутри которой давление *p*, снаружи давления нет. Считать, что продольной деформации нет и длина трубы поддерживается постоянной.

Решение.

Деформация \boldsymbol{u} везде направлена по радиусу и является функцией только r, поэтому $u_r = u(r)$ и

$$\nabla \boldsymbol{u} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \boldsymbol{u} = const = 2a, \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{u} = ar + \frac{b}{r}.$$

Поскольку

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad u_{zz} = u_{rz} = u_{r\phi} = u_{z\phi} = 0,$$

то

$$u_{rr} = a - \frac{b}{r^2}, \quad \rightarrow \quad u_{\varphi\varphi} = a + \frac{b}{r^2}.$$

Используя граничные условия

$$\sigma_{rr}|_{R_1} = -p, \quad \sigma_{rr}|_{R_2} = 0,$$

получим

$$a = \frac{oR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E}, \quad b = \frac{oR_1^2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{(1+\sigma)}{E},$$
$$\sigma_{rr} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right), \quad \sigma_{zz} = 2\sigma \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

 Определить деформацию цилиндра, равномерно вращающегося вокруг своей оси. Считать, что продольной деформации нет и длина цилиндра поддерживается постоянной.

Решение.

Уравнение равновесия в цилиндрических координатах, для $u_r = u(r)$ имеет следующий вид

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(yu)}{dr}\right) = =\rho\Omega^2 r.$$

Его решение, удовлетворяющее граничному условию $\sigma_{rr}|_{r=R} = 0$

$$u = \frac{\rho \Omega^2 (1+\sigma)(1-2\sigma)}{8E(1-\sigma)} r[(3-2\sigma)R^2 - r^2].$$

5. Определить деформацию неравномерно нагретого шара со сферически симметричным распределением температуры.

Решение.

Поскольку вектор деформаций имеет только одну компоненту $u_r = u(r)$, то уравнение равновесия (5.4) примет следующий вид:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2u)}{dr}\right) = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)}\frac{dT}{dr},$$

а его решение, конечное при r=0и удовлетворяющее граничному условию $\sigma_{rr}|_{r=R}=0$

$$u = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \left\{ \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r^2 \, dr + \frac{2(1-2\sigma)}{1+\sigma} \frac{r}{R^3} \int_0^R T(r) r^2 \, dr \right\},$$

где T(r) отсчитывается от значения при котором равномерно нагретый шар считается недеформированным. В качестве этой температуры взяли температуру внешней поверхности шара, т.е. T(R) = 0.

6. Определить деформацию неравномерно нагретого цилиндра с осесимметричным распределением температуры.

Решение.

$$u = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r T(r) r \, dr + (1-2\sigma) \frac{r}{R^2} \int_0^R T(r) r \, dr \right\}.$$

6 Равновесие стержней

- 6.1 Кручение стержней
- 6.2 Изгиб стержней
- 6.3 Устойчивость стержней

6.4 Задания для самостоятельной работы

- 1. р. 92 кручение
- 2. р. 105 сильный изгиб
- 3. р 116 слабый изгиб
- 4. р 120 устойчивость

7 Вибрация стержней

7.1 Продольные волны

Вывод уравнения и ГУ

7.2 Волны кручения

Вывод уравнения и ГУ

7.3 Примеры решения волнового уравнения

- 1. задано начальное перемещение и скорость перемещения по всей длине, концы зажаты
- 2. задано начальное перемещение и скорость перемещения по всей длине, концы свободны
- 3. неоднородное волновое уравнение
- 4. задано начальное перемещение и скорость перемещения по всей длине, также задано перемещение концов

5.

6.

7.4 Волны изгиба

Вывод уравнения и ГУ. Свободные колебания, концы: зажат, свободен, оперт

7.5 Задания для самостоятельной работы

1. p. 141

8 Идеальная жидкость, основные уравнения

8.1 Приближение сплошной среды

Модели природных явлений делятся на микроскопические (описывают взаимодействие отдельных атомов или молекул) и макроскопические (описывают явления в терминах средних значений). Течение газа и жидкости описывается макроскопическими моделями. Вводится физически бесконечно малый объем или жидкая частица размера $l: l_0 \ll l \ll L, l_0$ — расстояние между молекулами, L — характерный размер течения.

Бессмысленно устремлять этот размер к нулю, так определение плотности как предела

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V},$$

не корректно, такого предела не существует. Не существует и аналогичных пределов для определения температуры и давления.

Состояние движущейся жидкости описывается полем скоростей v(x, y, z, t) и полями каких-нибудь двух термодинамических величин, обычно плотности $\rho(x, y, z, t)$ и давления p(x, y, z, t). В термодинамике все величины определяются как функции двух из них с помощью уравнения состояния.

8.2 Закон сохранения массы

Масса жидкости, находящейся внутри некоторого объема V₀ равна

$$m = \int \rho \ dV.$$

В единицу времени через элемент поверхности df вытекает поток жидкости $\rho v df$. Масса жидкости, вытекающей в единицу времени через всю замкнутую поверхность, ограничивающую объем V_0

$$-\frac{\partial m}{\partial t} = \oint \rho \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{f}.$$

С другой стороны

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho \ dV,$$

следовательно

$$-\oint \rho \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{f} = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dV,$$

применив теорему Гаусса к правой части этого уравнения, получим

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \boldsymbol{v})\right) \, dV = 0.$$

Поскольку это равенство справедливо для любого объема V₀, то

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \boldsymbol{v}) = 0. \tag{8.1}$$

Вектор $\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v}$ называют плотностью потока жидкости. Он численно равен массе жидкости, протекающей в единицу времени через единицу площадки перпендикулярной скорости.

8.3 Уравнение Эйлера

Выделим в жидкости некоторый объем V_0 . Полная сила, действующая на V_0 равна (в идеальной жидкости нет сил внутреннего трения)

$$-\oint p \, df.$$

По теореме Гаусса

$$-\oint p \, d\boldsymbol{f} = -\int \nabla p \, dV,$$

откуда видно, что на элемент объема dV действует сила $-\nabla p \ dV$, а на единицу объема действует сила $-\nabla p$. Следовательно уравнение движения жидкой частицы имеет вид

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla p.$$

Здесь $d\boldsymbol{v}/dt$ — изменение скорости движущейся частицы жидкости. Выразим ее через величины, относящиеся к неподвижным пространственным точкам. Поскольку $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$, то по правилу дифференцирования функции нескольких переменных

$$d\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i} dx_i,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p.$$
(8.2)

тогда

Если жидкость находится в поле тяжести, тогда на ее единицу объема дополнительно действует сила ρg и уравнение (8.2) принимает вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g}.$$
(8.3)

В идеальной жидкости нет внутреннего трения и диссипации энергии в объеме, поэтому нет процессов теплопроводности, т.е. движение идеальной жидкости адиабатическое $\delta Q = TdS = 0$. Энтропия жидкой частицы остается постоянной при ее перемещении

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)s = 0.$$
(8.4)

С помощью уравнения непрерывности (17.2) этому уравнению можно придать такой вид

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla(\rho s \boldsymbol{v}) = 0,$$

 $\rho s v$ — плотность потока энтропии. Если в начальный момент времени энтропия одинакова во всех точках жидкости, тогда решение уравнения (8.4) будет

$$s = const.$$

Используем это условие, чтобы придать уравнению (8.2) другой вид. ИзdE=TdS-PdVследует

$$d(E + PV) = TdS + VdP = dW,$$

для единицы массы жидкости это соотношение примет следующий вид

$$dw = Tds + \frac{dP}{\rho},$$

т.к. s = const, то

$$\frac{\nabla P}{\rho} = \nabla w,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla w.$$
(8.5)

Поскольку

$$\frac{1}{2}\nabla v^2 = \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v},$$

то можно представить (8.2) и в следующем виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) = -\nabla \left(w + \frac{v^2}{2} \right),$$

ИЛИ

И

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \boldsymbol{v} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \nabla \times \boldsymbol{v}).$$

Граничные условия

- на неподвижных стенках имеют вид $v_n = 0;$
- на границе между несмешивающимися жидкостями выполняется равенство давлений и нормальных компонент скорости.

Движение жидкости определяется пятью величинами: тремя компонентами скорости и любыми двумя термодинамическими величинами, например ρ и *P*. Поэтому полная система уравнений должна состоят из пяти уравнений: это три компоненты уравнений Эйлера, уравнение непрерывности и уравнение, выражающее адиабатичность движения, для идеального газа (воздуха) это

$$p\rho^{-\gamma} = const, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.4,$$

для воды

$$\frac{p+B}{\rho^n} = const$$

8.4 Гидростатика

Если жидкость покоится и v = 0, то уравнение Эйлера принимает вид:

$$\nabla p = \rho \boldsymbol{g}.\tag{8.6}$$

Если $\rho = const, T = const,$ и покоящаяся жидкость имеет свободную поверхность, то

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad \rightarrow \quad p = p_0 + \rho g(h - z).$$

Если $\rho \neq const$, но T = const, то из dE = TdS - pdV следует $d\Phi = d(E - PV + TS) = TdS + Vdp$. Для микрообъема содержащего единицу массы $d\Phi = dp/\rho$, тогда $\nabla \Phi = \nabla p/\rho$ и условие механического равновесия

$$\nabla \Phi = \boldsymbol{g}, \quad \rightarrow \quad \Phi + gz = \varepsilon - \frac{p}{\rho} + sT + gz = const.$$

Из (8.6)

$$\rho = -\frac{1}{g}\frac{\partial p}{\partial z},$$

и поскольку в условиях механического равновесия p(z), то $\rho(z)$. Если же T(x, y, z), то и $\rho(x, y, z)$, а значит при заданной z поле давлений будет неоднородным. Жидкость будет перетекать из областей с высоким давлением в области с низким давлением, механическое равновесие невозможно.

8.5 Уравнения движения во вращающейся системе отсчета

В системе координат равномерно вращающейся с угловой скоростью Ω уравнение Ньютона имеет следующий вид

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{f} + 2m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\Omega} + m\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\Omega},$$

и содержит две дополнительные силы: Кориолиса $2m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\Omega}$ и центробежную $m\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\Omega}$.

Центробежную силу можно представить в виде градиента $\rho \nabla (\Omega \times \mathbf{r})^2/2$ и объединить с силой $-(\nabla p)/\rho$, вводя эффективное давление ($\rho = const$)

$$P = p - \frac{\rho}{2} (\Omega \times \boldsymbol{r})^2.$$

Кориолисова сила появляется при движении жидкости относительно вращающейся системы координат, **v** — скорость в этой системе.

Поэтому уравнение Эйлера имеет следующий вид

$$\partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} + 2\Omega \times \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P.$$

Уравнение непрерывности сохраняет свой прежний вид

$$\nabla \boldsymbol{v} = 0.$$

8.6 Задания для самостоятельной работы

1. Доказать

(a)

$$\nabla \boldsymbol{r} = 3, \quad \nabla \times \boldsymbol{r} = 0, \quad \nabla \frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3},$$

(b)
 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c},$
(c)

$$oldsymbol{a} imes (oldsymbol{b} imes oldsymbol{c}) = oldsymbol{b}(oldsymbol{a}oldsymbol{c}) - oldsymbol{c}(oldsymbol{a}oldsymbol{b}),$$

(d)

$$\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})=-\frac{1}{2}\nabla v^2+(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}.$$

2. Найдем условие равновесия жидкой частицы в неравномерно нагретой жидкости.

В равновесии на жидкую частицу действуют сила тяжести $-mg = -\rho(z)gV_0$ и сила Архимеда, равные по величине и противоположно направленные.

Если частица смещается по вертикали на $\zeta,$ то изменяется е
е плотность и объем, а масса и энтропия не меняются. На частицу по-преж
нему действуют сила тяжести и сила Архимеда

$$F = -mg + \rho(z+\zeta)g(V_0 + \Delta V) = \rho(z)gV_0\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\zeta}\zeta + \frac{\Delta V}{V_0}\right).$$

Поскольку s = const, то

$$\Delta p = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Delta \rho = c^2 \Delta \left(\frac{m}{V_0}\right) = c^2 m \left(-\frac{\Delta V}{V_0^2}\right) = -c^2 \rho(z) \frac{\Delta V}{V_0^2},$$

следовательно

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{1}{c^2 \rho} \Delta p = -\frac{1}{c^2 \rho} \frac{d\rho}{dz} \zeta = -\frac{1}{c^2 \rho} (-\rho g \zeta) = \frac{g\zeta}{c^2},$$
$$F = \rho g V_0 \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\zeta} + \frac{g}{c^2}\right) \zeta = -m N^2 \zeta, \quad N^2 = g \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\zeta} + \frac{g}{c^2}\right)$$

если F < 0, то сила F возвращает сместившуюся по вертикали жидкую частицу в исходное состояние, равновесие устойчиво:

$$-\frac{d\rho}{d\zeta} > \frac{\rho g}{c^2},$$

Если $F \ge 0$ равновесие не устойчиво.

9 Идеальная жидкость, законы сохранения

Применим уравнения движения для описания простейшего состояния идеальной жидкости — состояния покоя. Основные усилия будут направлены на получение новых законов сохранения. Два закона сохранения уже обсуждались: закон сохранения массы и постоянство энтропии движущегося микрообъема идеальной жидкости (если можно пренебречь диссипацией тепла из-за внутреннего трения и теплопроводностью, т.е. если движение адиабатическое).

9.1 Закон Бернулли

Пусть $\partial_t v = 0$, тогда v(r). Частицы жидкости движутся вдоль линий тока (линий всюду параллельных скорости жидкости). Уравнение Эйлера имеет следующий вид

$$\frac{1}{2}\nabla v^2 - \boldsymbol{v} \times \nabla \times \boldsymbol{v} = -\nabla w + \boldsymbol{g}.$$

Умножим это уравнение скалярно на единичный вектор
 \boldsymbol{l} параллельный скорости, тогда

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} + w - \boldsymbol{gr} \right) = 0, \quad \rightarrow \quad \frac{v^2}{2} + w - \boldsymbol{gr} = \frac{v^2}{2} + w + gz = const,$$

здесь $\partial/\partial l$ — производная по направлению l, см. ниже.

Для примера вычислим скорость истечения идеального газа в вакуум:

$$p\rho^{-\gamma} = A, \quad dw = \frac{dp}{\rho} = \frac{A\gamma\rho^{\gamma-1}}{\rho}d\rho, w = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho},$$
$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} = \frac{v^2}{2}, \quad v = \sqrt{\frac{2\gamma p}{(\gamma-1)\rho}} = c\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}},$$

 $c = \sqrt{\partial p / \partial \rho}$ — скорость звука в газе, заполняющем сосуд.

Приложение: производная по направлению

Пусть точки M
иM' находятся на расстояни
иh.Вектор, проведенный из M в
 M'

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\prime} = h(\boldsymbol{i}\coslpha + \boldsymbol{j}\coseta + \boldsymbol{k}\cos\gamma).$$

Производную по направлению определим так

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \lim_{h \to 0} \frac{U(M') - U(M)}{h} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma = l \cdot \nabla U, \quad l = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

Поскольку $\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{l} = 1$, то

$$\frac{\partial U}{\partial l} = |\nabla U| \cos \varphi.$$

Видно, что производная $\partial U/\partial l$ в точках, где $\nabla U \neq 0$, имеет единственное направление ($\varphi = 0$), в котором $U(\mathbf{r})$ растет максимально быстро. Это направление указывает ∇U .

9.2 Теорема Томсона

Циркуляция скорости жидкому контур
у $\gamma,$ движущемуся вместе с жидкостью, определяется так:

$$\Gamma = \oint_{\gamma} \boldsymbol{v} d\boldsymbol{l}.$$

Докажем, что при изоэнтропийном движении $\Gamma = const(t)$.



Puc. 9.1.

Обозначим dl как δr , см. рис. 9.1, т.е. пусть d обозначает дифференцирование по времени, а δ — по координате. Тогда

$$rac{d\Gamma}{dt} = rac{d}{dt} \oint_{\gamma} oldsymbol{v} \delta oldsymbol{r} = \oint_{\gamma} rac{doldsymbol{v}}{dt} \delta oldsymbol{r} + \oint_{\gamma} oldsymbol{v} rac{d\delta oldsymbol{r}}{dt},$$

первое слагаемое в левой части описывает изменение скорости, второе — изменение контура при течении жидкости.

Для преобразования первого слагаемого используем уравнение Эйлера

$$rac{doldsymbol{v}}{dt} = -
abla w + oldsymbol{g} =
abla (-w + oldsymbol{g}oldsymbol{r}).$$

Второе слагаемое преобразуем так

$$\boldsymbol{v}\frac{d\delta\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}\frac{\delta d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}\delta\boldsymbol{v} = \delta\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Тогда

$$\oint_{\gamma} \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \delta\boldsymbol{r} = \oint_{\gamma} \nabla(-w + \boldsymbol{g}\boldsymbol{r}) \delta\boldsymbol{r} = \int \nabla \times \nabla(-w + \boldsymbol{g}\boldsymbol{r}) \, d\boldsymbol{f} = 0,$$

поскольку ротор градиента тождественно равен нулю.

$$\oint_{\gamma} \boldsymbol{v} \frac{d\delta \boldsymbol{r}}{dt} = \oint_{\gamma} \delta\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0,$$

как интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала. Следовательно

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \quad \Gamma = const(t).$$

Закон сохранения циркуляции справедлив когда $\nabla p/\rho = \nabla w.$ Поскольку, для единицы массы,

$$w = \varepsilon + \frac{p}{\rho}, \quad dw = d\varepsilon - \frac{p}{\rho^2} d\rho, d\varepsilon = T ds - p d \frac{1}{\rho} = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho,$$

то если ds = 0, то

$$dw = \frac{dp}{\rho}, \quad \nabla w = \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

Следовательно, закон сохранения циркуляции справедлив когда $s(p, \rho) = const$, течение изоэнтропийное.

Применим теорему Томсона к бесконечно малому контуру

$$\oint \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{l} = \int \nabla \times \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{S} = \delta \boldsymbol{S} \cdot \nabla \times \boldsymbol{v} = const,$$

завихренность $\nabla \times v$ переносится вместе с движущейся жидкостью.

Для бесконечно малого контура завихненность можно выразить через локальную угловую скорость вращения жидкости

$$\oint \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{l} = \int \nabla \times \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{S} \quad \rightarrow \quad 2\pi r v = |\nabla \times \boldsymbol{v}| \pi r^2, \quad \rightarrow \quad |\nabla \times \boldsymbol{v}| = 2\frac{v}{r} = 2\omega.$$

9.3 Закон сохранения энергии

Согласно закону сохранения энергии, скорость изменения энергии в выделенном, неподвижном в пространстве, объеме равна потоку энергии через границы объема плюс работа сил давления над жидкостью находящейся в этом объеме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon\right) \, dV = -\oint \nabla \boldsymbol{S} \, d\boldsymbol{f} + A,$$

 ε — внутренняя энергия жидкости, S — поток энергии.

Будем преобразовывать выражение для скорости изменения энергии в единице объема (напомним, что ε — внутренняя энергия, а $1/\rho$ — объем единицы массы жидкости)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon \right),\,$$

начав с первого слагаемого

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\frac{v^2}{2} = \frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{v^2}{2} + \rho \boldsymbol{v}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{v^2}{2}\nabla(\rho\boldsymbol{v}) + \rho \boldsymbol{v}\left[-\frac{\nabla p}{\rho} - (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}\right],$$

использовали уравнение непрерывности и уравнение Эйлера.

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho \frac{v^2}{2} = -\frac{v^2}{2}\nabla(\rho \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}\nabla p - \frac{\rho}{2}(\boldsymbol{v}\nabla)v^2$$

Вычислим дифференциал второго слагаемого

$$d(\rho\varepsilon) = \varepsilon d\rho + \rho d\varepsilon = \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho}\right) d\rho - \frac{p}{\rho} d\rho + \rho d\varepsilon = w d\rho - \frac{p}{\rho} d\rho + \rho \left(T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho\right) = w d\rho + \rho T ds,$$

использовали закон сохранения внутренней энергии (в расчете на единицу массы)

$$d\varepsilon = Tds - pdV = Tds - pd\frac{1}{\rho} = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho,$$

где учитывали изменение энтропии, поскольку рассматриваем неподвижный объем. Тогда

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} = w\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho T\frac{\partial s}{\partial t} = -w\nabla(\rho\boldsymbol{v}) - \rho T(\boldsymbol{v}\nabla)s,$$

использовали уравнение непрерывности и закон сохранения энтропии движущегося микрообъма жидкости. Окончательно

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = -\nabla \left[\rho \boldsymbol{v} \left(w + \frac{v^2}{2} \right) \right]$$

В интегральной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) \, dV = -\oint \rho \boldsymbol{v} \left(w + \frac{v^2}{2}\right) \, d\boldsymbol{f} = \\ = -\oint \rho \boldsymbol{v} \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right) \, d\boldsymbol{f} = -\oint \rho \boldsymbol{v} \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) \, d\boldsymbol{f} - \oint p \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{f}.$$

9.4 Закон сохранения импульса

Единица объема жидкости имеет импульс ρv_i .

$$\partial_t(\rho v_i) = \rho \partial_t v_i + v_i \partial_t \rho - \rho \left(-v_k \nabla_k v_i - \frac{1}{\rho} \nabla_i p \right) - v_i \nabla_k(\rho v_k) =$$

$$= -\nabla_i p - \nabla_k (\rho v_i v_k) = -\delta_{ik} \nabla_k p - \nabla_k (\rho v_i v_k) = -\nabla_k \Pi_{ik}, \quad \Pi_{ik} = \delta_{ik} p + \rho v_i v_k)$$

Интегрируем по объему

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_i \ dV = -\oint \Pi_{ik} \ df_k,$$

 $\Pi_{ik} - i$ -ая компонента плотности потока импульса, протекающего в единицу времени через единичную площадку перпендикулярную оси x_k .

Если направления осе
й x_i и x_k совпадают, плотность потока импульса равн
а $p+\rho v^2$. Если направления осей x_i и
 x_k перпендикулярны, плотность потока импульса равна
 p.

9.5 Задания для самостоятельной работы

1. Для измерения скорости движения жидкости в трубе используют устройство, называемое трубкой Вентури, см. рис. 9.2. Применим закон Бернулли, считая течение изоэнтропийным и несжимаемы, тогда $\varepsilon(s, \rho) = const$ и $w = \varepsilon(s, \rho) + p/\rho$ можно заменить на p/ρ :

$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} = \frac{p_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2},$$

где $v_A S_A = v_B S_B$, тогда

$$v_A = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho} \left(\frac{S_A^2}{S_b^2} - 1\right)},$$

измерив разность давлений $p_A - p_B$, вычисляем скорость жидкости в трубе v_A .

 Когда жидкость обтекает два параллельные цилиндра, оси которых перпендикулярны потоку, то в промежутке между ними скорость жидкости выше, см. линии тока на рис. 9.3. Поэтому, согласно закона Бернулли, давление ниже и цилиндры притягиваются. Также притягиваются и два корабля, идущие параллельным курсом.



Puc. 9.2.

Puc. 9.3.

3. Рассмотрим вытекание жидкости из сосуда, см. рис. 9.4, где пунктиром показана линия тока. На ее верхнем конце $p = p_0, z = z_1, v = v_1$, на нижнем $p = p_0, z = z_2, v = v_2$. Поскольку $v_1 \ll v_2$, то

 $gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + gz_2, \quad \to \quad v_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)}.$

Puc. 9.4.

Puc. 9.5.

4. Опыт показывает, что вытекающая струя сжимается и площадь ее сечения S' меньше пощади отверстия S. Отношение k = S'/S называется коэффициентом истечения. Вычислим k для случая, когда к отверстию изнутри присоединена трубка (насадок Борда), см. рис. 9.5.

Давление с противоположных точках сосуда D' и D равны. В точках A' и A не равны. На отрезке жидкость у стенок неподвижна и создает силу $F = \rho g(z_1 - z_2)S$, но $F = \Delta p/\Delta t$, а импульс вытекающей жидкости $\Delta p = \rho v_2^2 S \Delta t$, следовательно

$$\rho g(z_1 - z_2)S = \rho v_2^2 S', \quad \to \quad k = \frac{S'}{S} = \frac{g(z_1 - z_2)}{v_2^2} = \frac{1}{2}$$

Если насадка Борда нет, то у стенок вблизи отверстия буде не нулевая скорость. Поэтому давление на стенку вблизи отверстия уменьшится, а на отверстие — возрастет (чтобы уравновесить давление на противоположную стенку), значит k увеличится.

5. Теорема Эйлера.

Вычислим силу, действующую на тело, при его обтекании стационарным потоком несжимаемой жидкости. В идеальной жидкости нет сил трения, поэтому импульс сохраняется:

$$\oint_{S} \Pi_{ik} df_{k} = \oint_{S} (p\delta_{ik} + \rho v_{i}v_{k}) n_{k}df = 0,$$

где в качестве замкнутой поверхности *S* выбрали поверхность участка трубки тока, см. рис. 9.6.



Puc. 9.6.

Интеграл по боковой поверхности от $\rho v_i v_k$ равен нулю, поскольку $v_k n_k = \boldsymbol{v} \boldsymbol{n} = 0$, т.к. скорость направлена вдоль стенки. Поэтому

$$F_i = \oint_S pn_i \, df = -\int_{S_1} \rho v_i v_k n_k \, df - \int_{S_2} \rho v_i v_k n_k \, df,$$

где F_i — результирующая сила, действующая со стороны жидкости на выделенный участок трубки тока. Из рис. 8.2 видно, что на поверхности S_1 : $v_k n_k = -v$, а на поверхности S_2 : $v_k n_k = v$, поэтому

$$F_{i} = \int_{S_{1}} \rho v^{2} n_{i} \, df - \int_{S_{2}} \rho v^{2} n_{i} \, df,$$

или

$$\boldsymbol{F} = \int_{S_1} \rho v^2 \, d\boldsymbol{f} - \int_{S_2} \rho v^2 \, d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_2,$$

 P_1 — импульс втекающий через S_1 , P_2 — вытекающий через S_2 в единицу времени.

Внутри выделенного элемента трубки тока, за единицу времени, жидкость теряет импульс $P_1 - P_2$. Импульс жидкости меняется потому, что на жидкость внутри трубки тока действует сила F.

Тогда по III закону Ньютона, на тело обтекаемое жидкостью действует сила $-F = P_2 - P_1$.

6. Парадокс Даламбера: при обтекании гладкого тела идеальной несжимаемой жидкостью, сила сопротивления равна нулю.

Вокруг обтекаемого тела выберем цилиндрическую трубку тока так, чтобы течение во входном сечении площади S_1 и выходном, площади S_2 были не возмущены телом. Жидкость считаем несжимаемой, поэтому будут равными скорости в этих сечениях. Значит, в трубку тока втекает и вытекает одинаковый импульс импульс, а суммарная сила F_{sum} , действующая на жидкость равна нулю:

$$F_{sum} = F + p_1 S_1 - p_2 S_2 = 0,$$

где F — сила, действующая на жидкость со стороны тела. Поскольку $S_1 = S_2, p_1 = p_2$, то F = 0.

Сила сопротивления не равна нулю, если нарушаются допущения, принятые при доказательстве:

- жидкость обладает вязкостью;
- набегающий поток не стационарен;
- за телом образуются неоднородности (дорожка Кармана, кавитация, линия отрыва течения за плохо обтекаемым телом, ударные волны при сверхзвуковом течении);
- если тело занимает не весь объем вокруг тела (уходящая в бесконечность область неподвижной жидкости за телом, волны на поверхности);
- если не совпадают условия на бесконечности, например к телу подводится тепло.

10 Идеальная жидкость, потенциальное и вихревое течение

10.1 Потенциальное течение

Если в начальный момент времени завихренность отсутствует $\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$, то, казалось бы, такое течение всегда будет не завихренным, что следует из теоремы Томсона, примененной к произвольному бесконечно малому контуру

$$\Gamma = \oint \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{l} = \nabla \times \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{f} = 0.$$

Этот вывод не верен, если течение ограничено твердыми стенками. Для линий тока, или траекторий частиц при нестационарном течении, проходящим вдоль твердых стенок, нельзя построить охватывающий их контур интегрирования. Поэтому для таких линий тока и траекторий теорема Томсона не выполняется.

Более того, из опыта известно такое свойство течений, как отрыв линий тока от поверхности обтекаемого тела. Пример такого отрыва приведен на рис. 10.1.



Рис. 10.1. Пример отрыва линий тока от поверхности плохо обтекаемого тела

В теории Эйлера это, по-видимому (нужно проверить) связано с появлением на поверхности обтекаемого тела поверхностного ротора скорости не равного нулю. Причем место отрыва вычислить нельзя.

В эксперименте отрыв линий тока от поверхности определяется процессами в погранслое, где влияние вязкости всегда сильное. Место отрава может быть вычислено методами гидродинамики вязких жидкостей.

Если ограничиться рассмотрением только хорошо обтекаемых тел, т.е. тел от поверхности которых линии тока не отрываются. Для таких тел, если натекающий поток безвихревой, то $\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$ и можно ввести понятие потенциал скорости

$$\boldsymbol{v} = \nabla \varphi.$$

Такое течение называют потенциальным.

Тогда из уравнения Эйлера

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) = -\nabla \left(w + \frac{v^2}{2} \right),$$

следует

$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w\right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w = f(t),$$

Произвольную функцию f(t) можно положить равной нулю, т.к. согласно определению потенциал φ определен с точностью до произвольного слагаемого не являющегося функцией координат. Сделаем такую замену

$$\varphi \to \varphi + \int^t f(\tau) \ d\tau,$$

тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w = 0.$$

Для стационарных течений можно выбрать потенциал φ не зависящим от времени $\partial_t \varphi = 0$, тогда получаем закон Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + w = 0$$

10.2 Несжимаемая жидкость

10.2.1 Основные модели

Во многих случаях плотность жидкости не меняется при ее движении $\rho = const$. Уравнение Эйлера изменятся так: плотность можно внести по знак градиента

$$\partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \nabla) \boldsymbol{v} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \boldsymbol{g}.$$

Упростится и вид уравнения непрерывности

$$\nabla \boldsymbol{v} = 0.$$

Закон Бернулли и плотность потока энергии принимают следующий вид

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = const, \quad \rho \boldsymbol{v} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right),$$

т.к. при $s, \rho = const$ получим $d\varepsilon = Tds - pdV = 0$, значит $\varepsilon = const$ и $w = \varepsilon + p/\rho$ можно заменить на p/ρ .

Для потенциального течения $\boldsymbol{v} = \nabla \varphi$, тогда из условия несжимаемости $\nabla \boldsymbol{v} = 0$ следует, уравнение Лапласа для потенциала скорости, полностью описывающее течение идеальной несжимаемой жидкости

$$\nabla^2 \varphi = 0,$$

Граничными условиями будет заданная нормальная компонента скорости, как функция координат и времени

$$v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

По найденному потенциалу $\varphi(\boldsymbol{r},t)$ не составит труда найти скорость и давление

$$\boldsymbol{v} = \nabla \varphi, \quad p = -\rho \left(\frac{v^2}{2} + gz + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

Если движение жидкости плоское, т.е. $\boldsymbol{v}(x,y)$, то из уравнения непрерывности

$$\nabla \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

видно, что выразив v_x и v_y через функцию тока

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

обратим уравнение непрерывности в тождество, а уравнение Эйлера примет следующий вид

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} = 0.$$

Функция тока задает семейство линий тока условием $\psi(x, y) = const$, поэтому и назвали ψ функцией тока. Действительно, направление касательной к линиям тока совпадает с направлением скорости, т.е.

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y},$$
 или $-v_x dy + v_y dx = 0,$

тогда

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = -v_ydx + v_xdy = 0,$$

значит, $\psi(x,y) = const$ вдоль линий тока.

Поток жидкости Q через плоскую кривую, соединяющую точки 1 и 2 не зависит от формы этой кривой и также определяется функцией тока:

$$Q = \rho \int_{1}^{2} v_n \, dl = \rho \int_{1}^{2} (-v_y dx + v_x dy) = \rho \int_{1}^{2} d\psi = \rho (\psi_2 - \psi_1),$$

поскольку, см. рис. 10.2

$$oldsymbol{vn} = v_x \cos(oldsymbol{ne}_x) + v_y \cos(oldsymbol{ne}_y),$$

 $dl \cdot \cos(oldsymbol{ne}_x) = dl \cos artheta = dy,$
 $dl \cdot \cos(oldsymbol{ne}_e) = -dl \sin artheta = -dx.$



Puc. 10.2.

Потенциал и функция тока связаны с компонентами скорости следующими соотношениями

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

совпадающими с условиями Коши-Римана. Поэтому φ и ψ можно рассматривать как действительную и мнимую часть аналитической функции $w = \varphi + i\psi$ комплексного переменного z = x + iy. Пока мы отложим знакомство с применением аппарата аналитических функций для решения задач гидродинамики.

В заключение этого раздела проанализируем условия при которых стационарное течение жидкости можно считать несжимаемым. В адиабатическом процессе

$$\Delta \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_S \Delta p = \frac{\Delta p}{c^2},$$

c — скорость звука. Согласно закону Бернулли $\Delta p \sim \rho v^2$, тогда из $\Delta \rho \ll \rho$ следует $v \ll c$. Жидкость несжимаема, если ее скорость течения много меньше скорости звука.

10.2.2 Потенциальное обтекание тел

Если тело имеет обтекаемую форму, линии тока не отрываются от его поверхности и течение мало отличается от потенциального.

Пусть тело движется со скоростью u, тогда (в системе координат связанной с телом) течение жидкости определяется уравнением Лапласа $\Delta \varphi = 0$, с граничными условиями: $\varphi \to \infty$ при $r \to \infty$, а на поверхности тела

$$oldsymbol{u}oldsymbol{n}_0 = oldsymbol{v}oldsymbol{n}_0 = rac{\partialarphi}{\partial n_0},$$

см. рис. 10.3.



Puc. 10.3.

Решением уравнения Лапласа является функция 1/r и ее производные:

$$\varphi = \frac{a}{r} + A\nabla \frac{1}{r} + b_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \frac{1}{r} + \dots,$$

Коэффициенты подбираются так, чтобы удовлетворить граничным условиям.

На больших расстояниях от тела можно отбросить слагаемые с высокими степенями r,тогда

$$oldsymbol{v} =
abla arphi = -rac{aoldsymbol{n}}{r^2} + rac{3(oldsymbol{A}n)oldsymbol{n} - oldsymbol{A}}{r^3}, \quad oldsymbol{n} = rac{oldsymbol{r}}{r},$$

Если объем тела $V_0 = const$, то суммарный поток из V равен нулю, поэтому a = 0. Поскольку уравнение Лапласа и ГУ линейны, то $v \sim u$, значит $A_i = \alpha_{ik} u_k$.

Найдем кинетическую (а значит и полную) энергию жидкости внутри сферы радиуса R. Поскольку

$$\nabla \left[(\varphi + \boldsymbol{u} \boldsymbol{r}) (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \right] = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \nabla (\varphi + \boldsymbol{u} \boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}),$$

то

$$E = \frac{\rho}{2} \int_{V-V_0} v^2 \, dV = \frac{\rho}{2} \int_{V-V_0} [u^2 + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u})(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}] \, dV =$$

= $\frac{\rho u^2}{2} (V - V_0) + \frac{\rho}{2} \int_{V-V_0} \nabla \left[(\varphi + \boldsymbol{u} \boldsymbol{r})(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \right] \, dV =$
= $\frac{\rho u^2}{2} (V - V_0) + \frac{\rho}{2} \int_{S,S_0} (\varphi + \boldsymbol{u} \boldsymbol{r})(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \, d\boldsymbol{S}.$

Интеграл по поверхности тел
а S_0 равен нулю, что следует из граничных условий
 $\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{u}\boldsymbol{n}_0$

$$(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})d\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}_0 - \boldsymbol{u}\boldsymbol{n}_0)dS = 0.$$

Тогда

$$\int_{S} = \int \left(-\frac{\mathbf{A}\mathbf{r}}{r^{3}} + \mathbf{u}\mathbf{r} \right) \left(\frac{3(\mathbf{A}\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{A}}{r^{3}} - \mathbf{u} \right) r^{2}\mathbf{n} \ d\Omega =$$
$$= \int \left(-\frac{\mathbf{A}\mathbf{n}}{R^{2}} + R\mathbf{n}\mathbf{n} \right) \left(\frac{2(\mathbf{A}\mathbf{n})\mathbf{n}}{R^{3}} - \mathbf{u}\mathbf{n} \right) R^{2} \ d\Omega \approx$$
$$\approx \int \left(-R^{3}(\mathbf{u}\mathbf{n})^{2} + 3(\mathbf{A}\mathbf{n})(\mathbf{u}\mathbf{n}) \right) \ d\Omega = \left(-R^{3}u_{i}u_{k} + 3A_{i}u_{k} \right) \int n_{i}n_{k} \ d\Omega.$$

Поскольку интегрирование по $d\Omega$ эквивалентно усреднению по углам с последующим умножением на $4\pi,$ то

$$\int n_i n_k \ d\Omega = \frac{4\pi \delta_{ik}}{3},$$

поэтому

$$E = \frac{\rho}{2}(4\pi \boldsymbol{u}\boldsymbol{A} - v_0 u^2) = \frac{m_{ik}u_i u_k}{2},$$

где $m_{ik} = 4\pi\rho\alpha_{ik} - \rho V_0 \delta_{ik}.$

Определим импульс жидкости, приведенной в движение телом

$$dE = \mathbf{F}d\mathbf{r} = \mathbf{F}\mathbf{u}dt = \mathbf{u}d\mathbf{P}, \quad \rightarrow \quad u_i dP_i = m_{ik}u_i du_k, \quad \rightarrow \quad P_i = m_{ik}u_k,$$
$$\rightarrow \quad \mathbf{P} = -\rho V_0 \mathbf{u} + 4\pi\rho \mathbf{A}.$$

Уравнение движения тела массы M

$$M\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{f} - \frac{d\boldsymbol{P}}{dt},$$

со стороны жидкости на тело действует сила $-d\boldsymbol{P}/dt$, \boldsymbol{f} внешняя сила.

Поскольку при равномерном движении P не зависит от времени, то сила сопротивления движению тела (произвольной формы), т.е. суммарная сила -dP/dt = 0, действующая со сторона жидкости на тело, будет равна нулю. Этот результат называется парадоксом Даламбера. В реальной жидкости сила сопротивления не равна нулю из-за непотенциальности течения обусловленного вязкостью.

В заключение, запишем выражение для внешней силы, приводящей тело в движение:

$$f_i = M \frac{du_i}{dt} + \frac{dP_i}{dt} = M \frac{du_i}{dt} + \frac{d}{dt} m_{ik} u_k = (M\delta_{ik} + m_{ik}) \frac{du_k}{dt},$$

тик называют присоединенной массой при движении тела в жидкости.

10.3 Вихревое движение несжимаемой жидкости

Пусть $\omega = \nabla \times v \neq 0$. Найдем закон изменения завихренности ω в несжимаемой жидкости, для чего уравнение Эйлера

$$\partial_t \boldsymbol{v} + \nabla \frac{v^2}{2} - \boldsymbol{v} \times \nabla \times \boldsymbol{v} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \nabla (\boldsymbol{gr}),$$

умножив векторно на ∇ , получим

$$\partial_t oldsymbol{\omega} =
abla imes oldsymbol{v} imes oldsymbol{\omega} = (oldsymbol{\omega}
abla) oldsymbol{v} - (oldsymbol{v}
abla) oldsymbol{\omega}$$

или

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega}\nabla)\boldsymbol{v}.$$

Это уравнение называется уравнением вмороженности вихря в жидкость. Это название объясняется тем, что такое же уравнение описывает изменение расстояния между двумя близкими точками в жидкости, действительно, см. рис. 10.4:



Puc. 10.4.

$$\frac{d\delta \boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_2) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_1) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r} + \delta \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_1) = (\delta \boldsymbol{r} \nabla) \boldsymbol{v}$$

Закон изменения ω и элемента жидкой линии одинаков. Следствия из одинаковости этих законов рассмотрим на примерах.

Пусть вихревая линия прямая $\boldsymbol{v} = (0, v_{\varphi}, 0)$, тогда, см. рис. 10.5, $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$

$$\oint \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{l} = \int \boldsymbol{\omega} \, d\boldsymbol{f}, \quad \rightarrow \quad 2\pi r v_{\varphi} = \omega \pi r^2, \quad \rightarrow \quad v_{\varphi} = \frac{\omega r}{2}, \quad r < a,$$
$$\oint \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{l} = \int \boldsymbol{\omega} \, d\boldsymbol{f}, \quad \rightarrow \quad 2\pi r v_{\varphi} = \omega \pi a^2, \quad \rightarrow \quad v_{\varphi} = \frac{\omega a^2}{2r}, \quad r \ge a.$$

Если на расстоянии $R \gg a$ окажутся два параллельных, противоположно направленных вихря, см. рис. 10.6, то левый вихрь (№1) будет смещаться как целое в







Puc. 10.6.

направлении \boldsymbol{y} со скоростью $v_y = \omega_0 a^2/2R$ в поле скоростей соседнего вихря №2. А вихрь №2 будет смещаться в поле скоростей вихря №1, в том же направлении и с той же скоростью.

Эта же модель описывает движение вихря вблизи плоской стенки: взаимодействие с вихрем-изображением вызовет движение в направлении параллельном стенке и с той же скоростью v_y .

Два одинаковых вихря, см. рис. 10.7, будут кружиться.



Puc. 10.7.

Противоположные участки вихревого кольца, см. рис. 10.8, взаимодействуют как параллельные разнонаправленные вихри. Поэтому кольцо движется перпендикулярно своей плоскости.

10.4 Задания для самостоятельной работы

1. Доказать, что

$$abla imes oldsymbol{v} imes oldsymbol{\omega} = (oldsymbol{\omega}
abla) oldsymbol{v} - (oldsymbol{v}
abla) oldsymbol{\omega},$$



Puc. 10.8.

Решение.

$$(\nabla \times \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega})_i = e_{ijk} \nabla_j e_{knm} v_n \omega_m = e_{ijk} e_{knm} \nabla_j v_n \omega_m =$$
$$= e_{ijk} e_{nmk} \nabla_j v_n \omega_m = (\delta_{in} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jn}) \nabla_j v_n \omega_m =$$
$$= \nabla_m v_i \omega_m - \nabla_n v_i \omega_i = \omega_m \nabla_m v_i - v_n \nabla_n \omega_i.$$

- 2. Первая теорема Гельмгольца о вихрях: области идеальной жидкости, лишенные вихрей в начальный момент времени, будут лишены их и в дальнейшем.
- 3. Вторая теорема Гельмгольца о вихрях: вихревая линия (векторное поле $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v}$) состоит все время из одних и тех же частиц, т.е. движется вместе с жидкостью.

Построим вихревую трубку (берем замкнутый контур и через каждую его точку проводим вихревую линию, получится поверхность вихревой трубки). Выберем односвязный контур целиком лежащий на поверхности вихревой трубки, тогда

$$\Gamma = \oint \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{l} = \int_{S} \nabla \times \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{f} = 0,$$

т.к. $\nabla \times \boldsymbol{v} \perp d\boldsymbol{f}$, где S — поверхность трубки внутри выбранного контура. По теореме Томсона $\Gamma = 0$ всегда, т.е. частицы жидкости принадлежащие поверхности S всегда будет лежать на вихревой трубке.

Сделаем вихревую трубку бесконечно тонкой, практически совпадающей с вихревой линией. Эта вихревая линия всегда будет состоять из одних и тех же частиц.

4. Третья теорема Гельмгольца о вихрях: поток вектора $\boldsymbol{\omega}$ через поперечное сечение вихревой трубки

$$\int_{S} \boldsymbol{\omega} \, d\boldsymbol{f} = const.$$

Поток $\boldsymbol{\omega}$ через любую замкнутую поверхность S_0 равен нулю

$$\int_{S_0} \boldsymbol{\omega} \, d\boldsymbol{f} = \int \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \, dV = 0,$$

T.K. $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{v} = 0.$

Выберем S_0 состоящей из двух торцо
в S_1,S_2 и боковой поверхности вихревой трубк
и S^\prime

$$\int_{S_0} \boldsymbol{\omega} \, d\boldsymbol{f} = \int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \, d\boldsymbol{f} + \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \, d\boldsymbol{f} + \int_{S'} \boldsymbol{\omega} \, d\boldsymbol{f} = \int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \, d\boldsymbol{f} + \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \, d\boldsymbol{f}.$$

Интеграл по боковой поверхности равен нулю, т.к. на ней $\boldsymbol{\omega} \perp d\boldsymbol{f}.$

Пусть в поверхность S_1 вихревые линии входят, а из S_2 выходят, тогда первый интеграл меньше нуля, второй — больше нуля и равны по модулю. Утверждение доказано.

Если сечение S мало и перпендикулярно $\boldsymbol{\omega}$, то

$$\int_{S} \boldsymbol{\omega} \, d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\omega} S = const.$$

ωS называют интенсивностью вихревой трубки. Значит интенсивность постоянна вдаль вихревой трубки. Поэтому вихревые трубки не могут начинаться и заканчиваться в жидкости. Вихревые трубки замкнуты или начинаются и заканчиваются в бесконечности или на стенках или поверхности жидкости.

5. Найти распределение скорости и давления при обтекании шара однородным на бесконечности потоком.

Для произвольного тела, движущегося в жидкости

$$\boldsymbol{v} = -\frac{\boldsymbol{A}}{r^3} + 3(\boldsymbol{A}\boldsymbol{n})\frac{\boldsymbol{n}}{r^3} = -\frac{\alpha}{r^3}\boldsymbol{v}_0 + 3\alpha\frac{(\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{r})}{r^3}\frac{\boldsymbol{r}}{r^2},$$

где $\boldsymbol{A} = \alpha \boldsymbol{v}_0, \, \boldsymbol{v}_0 -$ скорость шара.

Условие равенства нормальных компонент скорости точек шара на его поверхности и контактирующих с поверхностью частиц жидкости имеет следующий вид

$$\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{R}}{R} = \frac{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{R}}{R}$$

подставляя это условие в найденное решение, получим

$$\alpha = \frac{R^3}{2}, \quad \boldsymbol{v} = -\frac{1}{2}\frac{R^3}{r^3}\boldsymbol{v}_0 + \frac{3}{2}\frac{(\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^2}\frac{R^3}{r^3},$$

Если наложить на найденное решение однородный поток со скоростью $-v_0$, то получим решение задачи об обтекании шара потоком, скорость которого на бесконечности равна $-v_0$

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}_0 - rac{1}{2}rac{R^3}{r^3}\boldsymbol{v}_0 + rac{3}{2}rac{(\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^2}rac{R^3}{r^3}.$$

Распределение давления по поверхности сферы находится из закона Бернулли

0

9

$$p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} = p + \frac{\rho v^2}{2},$$
$$v^2 = \left(-\boldsymbol{v}_0 - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_0 + \frac{3}{2}(\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\right)^2 = \frac{9}{4}[-\boldsymbol{v}_0 + (\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}]^2 = \frac{9}{4}v_0^2\sin^2\theta,$$
$$p = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2} = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2\left(1 - \frac{9}{4}\sin^2\theta\right).$$



Puc. 10.9.

6. Вычислить присоединенную массу при движении шара в жидкости

$$m_{ik} = 4\pi\rho\alpha_{ik} - \rho V_0 \delta_{ik} = 4\pi\rho \frac{R^3}{2} - \rho \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\rho}{2}V_0.$$

11 Идеальная жидкость, типичные задачи

Задачи сгруппированы по принципу: от простых (часть А) к более сложным (часть В). Задачи части А и В даны с кратким описанием решений, а для задач части С приведены только ответы или ссылки на литературу, содержащую обсуждение проблемы, сформулированной в условии задачи.

11.1 Часть А

1. Дано поле скоростей $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$, написать дифференциальные уравнения линий тока.

Уравнение линий тока в параметрическом виде имеет вид r(s) или $v_i(s)$, s длина, измеряемая вдоль линии тока. Тогда вектор касательной dr/ds. По определению вектор касательной к линии тока параллелен вектору скорости в этой точке пространства, т.е.

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = C\boldsymbol{v}, \quad C = const,$$

откуда

$$\frac{1}{v_1}\frac{dx_1}{ds} = \frac{1}{v_2}\frac{dx_2}{ds} = \frac{1}{v_3}\frac{dx_3}{ds} = C, \quad \to \quad \frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3}.$$

2. Получить дифференциальное уравнение для вихревой линии в жидкости.

Пусть $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ параметрическое уравнение вихревой линии. Касательная к вихревой линии параллельна $\boldsymbol{\omega}$, тогда

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = C\boldsymbol{\omega}, \quad \rightarrow \quad \frac{dx_1}{\omega_1} = \frac{dx_2}{\omega_2} = \frac{dx_3}{\omega_3}.$$

3. Найти зависимость давления идеального газа от высоты в поле тяжести, если температура газа изменяется по закону T(z).

$$p = nkT = \frac{N}{V}kT = \frac{mN}{V}\frac{kTN_A}{mN_A} = \rho\frac{RT}{\mu}, \quad \rho = \frac{p\mu}{RT}$$

Уравнение Эйлера для покоящейся жидкости

$$\begin{split} 0 &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \boldsymbol{g}, \quad \rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} - g, \quad \rightarrow \quad dp = -\rho dz, \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{p} = -\frac{g\mu}{R} \frac{dz}{T}, \\ p(z) &= const \exp\left\{-\frac{g\mu}{R} \int^{z} \frac{dz}{T(z)}\right\} = p_{0} \exp\left\{-\frac{g\rho_{0}}{p_{0}} \int^{z}_{0} \frac{T_{0}}{T(z)} dz\right\}, \\ \text{K.} \\ \frac{\mu}{R} &= \frac{\rho_{0} T_{0}}{p_{0}}. \end{split}$$

т.

4. Цилиндрический сосуд с несжимаемой жидкостью вращается в поле тяжести с угловой скоростью Ω. Вычислить форму свободной поверхности.

Во вращающейся системе координат жидкость покоится. Уравнение Эйлера имеет следующий вид

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g} + \Omega^2 \boldsymbol{r}.$$
(11.1)

В цилиндрической системе координат

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_{\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

поэтому из (11.1) следует

$$\begin{split} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \Omega^2 r, \quad \rightarrow \quad p = \frac{\rho \Omega^2}{2} r^2 + const(r), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= 0, \quad \rightarrow \quad p = const(\varphi), \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= -g, \quad \rightarrow \quad p = -\rho g z + const(z), \end{split}$$

следовательно

$$p(r,\varphi) = p(0,0) - \rho gz + \frac{\rho \Omega^2}{2}r^2 = p_0 - \rho gz + \frac{\rho \Omega^2}{2}r^2.$$

На свободной поверхности жидкости $p(r,z) = p_a$, поэтому

$$p_a = p_0 - \rho g z + \frac{\rho \Omega^2}{2} r^2, \quad \to \quad z = \frac{p_a - p_0}{\rho g} + \frac{\Omega^2}{2g} r^2,$$

это параболоид вращения. Или

$$z = h + \frac{\Omega^2}{2g}r^2,$$

при r=0, z=h-расстояние от начала координат до нижней точки параболо
ида. Ясно, что $h(\Omega).$

Найдем зависимость $h(\Omega)$ из условия несжимаемости жидкости. Пусть при $\Omega = 0$ уровень жидкости равен H, тогда, см. рис. 11.1,



$$\pi R_1^2[z(R_1) - h] - \int_0^{R_1} [z(r) - h] 2\pi r \, dr = \int_{R_1}^R [z(r) - h] 2\pi r \, dr - (\pi R^2 - \pi R_1^2) [z(R_1) - h],$$

$$\pi R_1^2 \frac{\Omega^2}{2g} - 2\pi \frac{\Omega^2}{2g} \int_0^{R_1} r^3 dr = 2\pi \frac{\Omega^2}{2g} \int_{R_1}^R r^3 dr - \pi (R^2 - R_1^2) \frac{\Omega^2}{2g} R_1^2,$$
$$R_1^4 - 2\frac{R_1^4}{4} = 2\frac{R^4 - R_1^4}{4} - (R^2 - R_1^2)R_1^2, \quad \to \quad R_1 = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно

$$h = H - \frac{\Omega^2}{2g}R_1^2 = H - \frac{\Omega^2}{4g}R^2.$$

Уравнение поверхности

$$z = H - \frac{\Omega^2}{2g} \left(\frac{R^2}{2} - r^2\right).$$

Элементарный вывод уравнения свободной поверхности.

Из рис. 12.1 видно, что условие равновесия элемента объема жидкости

$$\Delta m \Omega^2 r = F_1 - F_2 = (P_1 - P_2)S = \rho g S(h_1 - h_2) = \rho g S \Delta h, \quad \Delta m = \rho S \Delta r,$$
$$\rho \Omega^2 r dr = \rho g \Delta h, \quad h = h_0 + \frac{\Omega^2 r^2}{2g}.$$

5. Вычислить зависимость давления от расстояния до центра Земли, считая *ρ* = *const*, вращением Земли пренебречь.

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g(r),$$

$$mg(r) = G \frac{mM(r)}{r^2} = G \frac{m}{r^2} \frac{4}{3} \pi \rho r^3,$$

$$g(r) = \frac{4}{3} G \pi \rho r, \quad g_0 = \frac{4}{3} G \pi \rho R, \quad g = g_0 \frac{r}{R}, \quad \rho = \frac{4}{3} \frac{g_0}{\pi G R},$$

следовательно

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g(r) = -\rho g_0 \frac{r}{R}, \quad p(r) = p_a + g_0 \rho \frac{R^2 - r^2}{2R} = p_a + \frac{3g_0^2}{8\pi G} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right),$$

где p_a — давление на поверхности Земли. Давление в центре Земли

$$p(0) = p_a + \frac{3g_0^2}{8\pi G} \approx 10^6 \text{ atm}.$$

6. Предложить такую зависимость площади сечения сосуда S(z) от вертикальной координаты, чтобы при истечении жидкости из отверстия, скорость изменения ее уровня в сосуде dz/dt = const.

$$\frac{dm}{dt} = \rho sv = \rho sk\sqrt{2g(z-z_0)},$$

где *s* — площадь отверстия, *k* — коэффициент истечения.

$$\frac{dm}{dt} = \rho S(z) \frac{dz}{dt}$$

приравнивая два выражения для скорости истечения массы жидкости, получим

$$\frac{dm}{dt} = \rho sv = \rho sk\sqrt{2g(z-z_0)} = \rho S(z)\frac{dz}{dt}, \quad \rightarrow \quad S(z) = \frac{ks\sqrt{2g}}{dz/dt}\sqrt{z-z_0}.$$

7. Вычислить присоединенную массу шара движущегося с постоянным ускорением *а* в несжимаемой жидкости.

Уравнение Лапласа для потенциала не содержит времени и описывает любое движение жидкости, в том числе и нестационарное. Положив в ранее полученном решении

$$\varphi = -\frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} (\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{v} = -\frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \boldsymbol{v}_0 + \frac{3}{2} \frac{(\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{r}) \boldsymbol{r}}{r^2} \frac{R^3}{r^3},$$

 $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{a}t$, получим

$$arphi = -rac{1}{2}rac{R^3}{r^3}(ar)t, \quad v = -rac{1}{2}rac{R^3}{r^3}at + rac{3}{2}rac{(ar)r}{r^2}rac{R^3}{r^3}t.$$

Далее воспользуемся законом сохранения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w = const,$$

в котором заменим w н
а $p/\rho,$ а также учтем, что при $r\to\infty$:
 $\varphi=0, p=p_0, v=0,$ тогда

$$p(r=R) = p_0 - \rho \left. \frac{v^2}{2} \right|_R - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_R = p_0 - \frac{\rho}{2} \left(-\frac{1}{2} \mathbf{a} t + \frac{3}{2} \cos \theta \mathbf{n} a t \right)^2 + \frac{\rho}{2} Ra \cos \theta =$$
$$= p_0 - \frac{\rho}{8} a^2 t^2 (1 + 3\cos^2 \theta) + \frac{\rho}{2} Ra \cos \theta.$$

Сила, действующая на шар в направлении его движения

$$F_x = -\int_S p(r=R)\frac{x}{r} \, df = -R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} p(r=R) \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi =$$
$$= -R^2 2\pi \frac{\rho a R}{2} \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = -\frac{2}{3}\pi R^3 \rho a = \frac{1}{2} V_0 \rho a = Ma,$$

 $M = \rho V_0 / 2$ — присоединенная масса, равная половине массы жидкости вытесненной шаром.

8. Вычислить частоту колебаний сферы массой $m = 4\pi R^3 \rho(z_0)/3$ и радиусом R, находящейся в равновесии в точке z_0 жидкости с плотностью $\rho(z)$.

В равновесии на сферу действуют сила тяжести $-mg = -\rho(z)gV_0$ и сила Архимеда, равные по величине и противоположно направленные.

Если сфера смещается по вертикали на ζ , то изменяется плотность окружающей ее жидкости. На сферу по-прежнему действуют сила тяжести и сила Архимеда

$$F = -mg + \rho(z+\zeta)gV_0 = \frac{d\rho}{dz}\zeta gV_0 = \rho gV_0 \cdot \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z} \cdot \zeta = m\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z} \cdot \zeta.$$

Если F<0,то сила будет возвращать сместившуюся частицу, уравнение колебаний сферы

$$(m+M)\ddot{\zeta} = F, \quad M = \frac{m}{2}, \quad \rightarrow \quad \omega_0^2 = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\cdot\zeta\right), \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

9. Вычислить давление, необходимое для расширения невесомой растяжимой оболочки с постоянным ускорением *a* в несжимаемой жидкости, и присоединенную массу жидкости.

Потенциальное течение несжимаемой жидкости описывается уравнением Лапласа для потенциала φ . Граничное условие для скорости через Δt

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_R = a \Delta t,$$

В сферически симметричном случае решением будет

$$\varphi = -\frac{a\Delta tR^2}{r}, \quad v(r) = \frac{a\Delta tR^2}{r^2}.$$

Энергия жидкостиEравна работе силы $F=4\pi R^2 p$

$$E = \frac{\rho}{2} \int_{V} v^{2} \, dV = \frac{\rho}{2} \int_{R}^{\infty} v^{2} 4\pi r^{2} \, dr = 2\pi R^{3} \rho (a\Delta t)^{2}, \quad A = F\Delta R = F\frac{a\Delta t^{2}}{2},$$

следовательно

$$2\pi R^3 \rho (a\Delta t)^2 = F \frac{a\Delta t^2}{2}, \quad F = 4\pi R^3 \rho a = 3ma,$$

т — масса жидкости вытесненная шаром. Присоединенная масса равна 3т.

$$F = 4\pi R^2 p = 3ma, \quad p = \frac{3}{4} \frac{ma}{\pi R^2}.$$

11.2 Часть В

1. Шар радиуса R движется со скоростью u(t) в несжимаемой жидкости. Найти поле скоростей и давление на его поверхности, считая течение потенциальным.

Потенциал и поле скоростей было найдено ранее

$$\varphi = -\frac{R^2}{2r^2}\boldsymbol{u}\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{v} = \frac{R^3}{2r^2}(3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

Давление равно

$$p = p_0 - \frac{\rho v^2}{2} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

 p_0 — давление на бесконечности. Выражения для потенциала (и скорости) получены в системе координат K' движущейся неравномерно со скоростью $\boldsymbol{u}(t)$ относительно неподвижной системы координат K, поэтому

$$\varphi(x'_i, u_i(t)), \quad x'_i = x_i - \int_0^t u(\tau) \, d\tau,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_i \frac{\partial \varphi}{\partial x'_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \dot{u}_i,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{u}} \dot{\boldsymbol{u}} - (\boldsymbol{u} \nabla) \varphi.$$

Тогда давление на поверхности сферы будет

$$p = p_0 + \frac{\rho u^2}{8} (9\cos^2\theta - 5) + \frac{\rho}{2} R \boldsymbol{n} \frac{d\boldsymbol{n}}{dt}.$$

2. Цилиндр радиуса R движется со скоростью u(t) перпендикулярно своей оси в несжимаемой жидкости. Найти поле скоростей и давление на его поверхности, считая течение потенциальным.

Решением уравнения Лапласа для цилиндра является $\ln r$ и его производные всех порядков. Производные обращаются в нуль на бесконечности, как и потенциал, поэтому будем искать решение в виде

$$\varphi = \mathbf{A} \nabla \ln r = \frac{\mathbf{A} \mathbf{n}}{r} = \frac{\mathbf{A} \mathbf{r}}{r^2},$$

тогда

$$\boldsymbol{v} = \nabla \varphi = \frac{\boldsymbol{A}}{r^2} - 2\boldsymbol{n} \frac{\boldsymbol{A} \boldsymbol{n}}{r^2}.$$

На поверхности цилиндра равны нормальные компоненты скоростей жидкости и твердого тела: Rv = Ru, кроме того $A = \alpha u$. Откуда $\alpha = -R^2$ и

$$\varphi = -\frac{R^2}{r} \boldsymbol{u} \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{v} = \frac{R^2}{r^2} (2\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u} \boldsymbol{n} - \boldsymbol{u})).$$

Давление на поверхности цилиндра

$$p = p_0 + \frac{\rho u^2}{2} (4\cos^2\theta - 3) + \rho R \boldsymbol{n} \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$$

3. Вычислить потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости внутри эллипсоида, вращающегося с углоой скоростью Ω вокруг одной из своих главных осей.

Направим оси координат вдоль осей эллипсоида (система координат вращается вместе с эллипсоидом). Пусть $\Omega = (0, 0, \Omega)$, тогда траектории точек, находящихся на стенках сосуда, будут окружностями. Их скорость

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r} = -\boldsymbol{i}\Omega \boldsymbol{y} + \boldsymbol{j}\Omega \boldsymbol{x} + \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{0}.$$

Граничные условия

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = u_n, \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{n} \nabla \varphi = \boldsymbol{u} \boldsymbol{n}.$$

Уравнение эллипсоида

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

нормаль к поверхности эллипсоида

$$const \cdot \boldsymbol{n} = \nabla f = 2\left(\boldsymbol{i}\frac{x}{a^2} + \boldsymbol{j}\frac{y}{b^2} + \boldsymbol{k}\frac{x}{c^2}\right),$$

следовательно

$$oldsymbol{n} = const\left(oldsymbol{i}rac{x}{a^2} + oldsymbol{j}rac{y}{b^2} + oldsymbol{k}rac{x}{c^2}
ight)$$

Тогда граничные условия

$$\frac{x}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{y}{b^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{z}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \Omega x y \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right).$$

Решение уравнения Лапласа с этим ГУ (проверяется подстановкой)

$$\varphi = \Omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy. \tag{11.2}$$

Момент импульса жидкости в сосуде

$$L = \rho \int (xv_y - yv_x) \ dV = \frac{\Omega \rho V}{5} \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2}.$$

Формула (11.2) определяет движение жидкости в системе координат вращающейся вместе с сосудом. Чтобы вычислить скорость жидкости относительно стенок сосуда, нужно вычесть скорость стенок, т.е. $\Omega \times r$

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \Omega y = \frac{2\Omega a^2}{a^2 + b^2} y, \quad v_y = -\frac{2\Omega b^2}{a^2 + b^2} x, \quad v_z = 0.$$

Траектории получаются путем интегрирования уравнений: $\dot{x} = v_x, \dot{y} = v_y$. Они представляют эллипсы $x^2/a^2 + y^2/b^2 = const$.

4. Найти течение жидкости вблизи критической точки *O* на рис 11.2 (где скорость равна нулю, а давление максимально).



Puc. 11.2.

Начало координат поместим в критическую точку. Малый участок вокруг критической точки будем считать плоским. Выберем его в качестве плоскости xy. Скорость вблизи критической точки малая величина, поэтому φ можно представить в виде разложения в ряд

$$\varphi = const + ax + by + cz + Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eez + Fxz.$$

Граничные условия:

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big|_{z=0}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|_{x,y,z=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big|_{x,y,z=0} = 0.$$

Чтобы φ удовлетворял уравнению Лапласа $\Delta \varphi = 0$ и ГУ, нужно

 $a = b = c = 0, \quad C + -A - B, \quad E = F = 0,$

Dxy можно исключить поворотом осей x и y, поэтому

$$\varphi = Ax^2 + By^2 - (A+B)z^2.$$

Если течение аксиально симметричное, то A = B

$$\varphi = A(x^2 + y^2 - 2z^2), \quad v_x = 2Ax, \quad v_y = 2Ay, \quad v_z = -4Az$$
Линии тока определяются уравнениями

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z},$$

откуда $x^2 z = c_1, y^2 z = c_2$ — кубические гиперболы.

Если течение однородно вдоль y (цилиндр с осью вдоль y), то B = 0

$$\varphi = A(x^2 - z^2), \quad v_x = 2Ax, \quad v_y = 2Ay, \quad v_z = -4Az.$$

Линии тока xz = const -гиперболы.

5. Вычислить поле скоростей при потенциальном течении внутри угла, см. рис. 11.3.



Выберем полярную систему координат с вершиной в вершине угла, уго
л θ будем отсчитывать от одной из сторон.

Граничные условия

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right|_{\theta=0,\alpha} = 0.$$

Решение уравнения Лапласа с этими ГУ будет

$$\varphi = Ar^n \cos n\theta, \quad n = \frac{\pi}{\alpha},$$

поэтому

$$v_r = nAr^{n-1}\cos n\theta, \quad v_\theta = -nA^{n-1}\sin n\theta.$$

6. Из несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство, удаляется сферический объем радиуса *a*. Определить время заполнения полости жидкостью (Besant, 1859; Rayleigh, 1917).

Движение жидкости центральносимметричное $v_r = v(r,t) < 0$. Уравнение Эйлера в сферических координатах

$$\partial_t v + v \partial v = -\frac{1}{\rho} \partial p,$$

условие постоянства потока

$$v = \frac{F(t)}{r^2},$$

F(*t*) — произвольная функция времени. Тогда

$$\frac{\dot{F}}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \quad \rightarrow \quad \int_R^\infty dr \frac{\dot{F}}{r^2} + \frac{1}{2}\int_R^\infty dr \frac{\partial v^2}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\int_R^\infty dr \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \rightarrow$$

$$-\frac{\dot{F}}{R(t)} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_0}{\rho},$$

где R(t) — радиус сферы, $p(\infty) = p_0, p(R) = 0, v(R) = V(t)$. Поскольку

$$F(t) = R^2(t)V(t), \quad \rightarrow \quad \dot{F} = 2RV^2 + r^2 \frac{dV}{dR}V,$$

то уравнение Эйлера принимает следующий вид

$$-2V^{2} - RV\frac{dV}{dR} + \frac{V^{2}}{2} = \frac{p_{0}}{\rho}, \quad \rightarrow \quad -\frac{3}{2}V^{2} - \frac{R}{2}\frac{dV^{2}}{dR} = \frac{p_{0}}{\rho}.$$

Решается методом разделения переменных с начальным условием $V(R)|_a = 0$

$$V^{2} = \frac{C}{R^{3}}, \quad C = -\frac{2}{3}\frac{p_{0}}{\rho}R^{3} + const, \quad V = -\sqrt{\frac{2p_{0}}{3\rho}\left(\frac{a^{3}}{R^{3}} - 1\right)}.$$

Поскольку $dR = V d\tau$, то время заполнения полости

$$\tau = \int_{a}^{0} \frac{dR}{V(R)}.$$

Этот интеграл приводится к В-интегралу Эйлера

$$\tau = \sqrt{\frac{3a^2 \pi \rho}{2p_0}} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)} = 0.915a \sqrt{\frac{\rho}{p_0}}.$$

7. Найти давление на поверхности сферы расширяющейся по закону R(t).

Пусть при r = R давление на поверхности сферы равно P(t), тогда, тем же методом, что и в предыдущей задаче получим уравнение движения

$$-\frac{F}{R(t)} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} - \frac{P(t)}{\rho}$$

Поскольку $F=VR^2,$ то $\dot{F}=\dot{V}R^2+2RV^2$ и

$$P(t) = p_0 + \rho \left(R\ddot{R} + \frac{3V^2}{2} \right) = p_0 + \frac{\rho}{2} \left[\frac{d^2 R^2}{dt^2} + \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right],$$

где учли, что $\ddot{R}^2 = 2\dot{R}^2 + 2R\ddot{R}.$

8. Стационарный поток идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ поворачивается на угол α трубой переменного сечения и выбрасывается в атмосферу (рис. 11.4). Считая, что в сечениях S₀ и S₁ скорость однородна, причем в сечении S₀ она равна v₀, определить силу, действующую на изогнутый участок трубы. Атмосферным давлением пренебречь.

При стационарном течении поток импульса Π_{ik} через замкнутую поверхность равен нулю

$$\oint \Pi_{ik} \, df_k = 0,$$





где Π_{ik} поток *i*-ой компоненты импульса через поверхность перпендикулярную n_k . Из рис. 11.4 следует

$$n_{0k}(p_0\delta_{ik} + \rho v_{0i}v_{0k}) + n_{1k}(p_1\delta_{ik} + \rho v_{1i}v_{1k}) + \int_S p\delta_{ik} df_k = 0$$

Здесь S — боковая поверхность трубы, на ней скорость направлена вдоль поверхности, поэтому $v_k df_k = 0$. Этот интеграл и есть сила F_i , действующая на изогнутую часть трубы

$$F_i = \int_S p \ df_i = -n_{0i} p_0 S_0 + \rho v_0 S_0 v_{0i} - \rho v_1 S_1 v_{1i},$$

учли, что $p_1 = 0$. Поскольку

$$v_1 = v_0 \frac{S_0}{S_1}, \quad p_0 = \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} \rho v_0^2 \left(\frac{S_0^2}{S_1^2} - 1 \right),$$

 $_{\rm TO}$

$$F_x = -\rho v_1 S_1 v_1 \sin \alpha = -\frac{\rho v_0^2 S_0^2}{S_1} \sin \alpha,$$

$$F_y = p_0 S_0 + \rho v_0^2 S_0 - \rho v_1 S_1 v_1 \cos \alpha =$$

$$= \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} \rho v_0^2 \left(\frac{S_0^2}{S_1^2} - 1\right) S_0 + \rho v_0^2 S_0 - \rho \frac{v_0^2 S_0^2}{S_1} \cos \alpha =$$

$$= \rho v_0^2 S_0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{S_0^2}{S_1^2} + 1\right) - \frac{S_0}{S_1} \cos \alpha\right].$$

 В воздух частота колебаний шарика на пружине ω₀. Какой будет частота в идеальной жидкости с плотностью ρ_L?. Плотность материала шарика равна ρ. Влиянием воздуха можно пренебречь, поэтому

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{\rho V}}.$$

В жидкости вместе с шариком будет совершать колебания присоединенная масса жидкости, поэтому

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\rho V + 0.5\rho_L V}} = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho}{\rho + 0.5\rho_L}}.$$

10. Определить период колебаний математического маятника (шара с плотностью ρ на ните длиной l) в идеальной несжимаемой жидкости плотностью ρ_L .

Уравнение колебаний математического маятника в вакууме

$$m\ddot{s} = -mg\frac{s}{l}, \quad \rightarrow \quad \rho V\ddot{s} = -\rho Vg\frac{s}{l}, \quad \rightarrow \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

В жидкости, учли присоединенную массу и силу Архимеда:

$$(\rho V + 0.5\rho_L V)\ddot{s} = -(\rho V - \rho_L V)g\frac{s}{l}, \quad \to \quad \omega^2 = \omega_0^2 \frac{\rho - \rho_L}{\rho + 0.5\rho_L}.$$

11. В вертикальной трубе радиусом R, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, соосно с ней помещен легкий (его плотность много меньше плотности жидкости) цилиндр радиусом r и длиной L (L > R, см. рис. 11.5). Определить ускорение, с которым будет всплывать цилиндр.



Puc. 11.5.

Обозначим u-скорость всплытия цилиндра, V-средняя скорость жидкости в зазоре между трубой и цилиндром

$$V = \frac{ur^2}{R^2 - r^2}.$$

Кинетическая энергия жидкости (в системе координат связанной с цилиндром)

$$E = m \frac{V^2}{2} = \{\rho \pi (R^2 - r^2)L\} \frac{u^2 r^4}{(R^2 - r^2)^2} = \frac{\pi \rho u^2 r^4 L}{2(R^2 - r^2)^2}$$

Поскольку

$$\frac{dE}{dt} = Fu,$$

 $F = m\dot{u}$ — сила взаимодействия жидкости и всплывающего цилиндра, m — масса движущейся жидкости (присоединенная масса), то

$$\frac{dE}{dt} = Fu = m\dot{u}u = \dot{u}u\frac{\pi\rho r^4 L}{R^2 - r^2}, \quad m = \frac{\pi\rho r^4 L}{R^2 - r^2}.$$

Уравнение движения цилиндра

$$\rho \pi r^2 L = ma, \quad a = \frac{g(R^2 - r^2)}{r^2}.$$

11.3 Часть С

1. Широкий сосуд с несжимаемой жидкостью движется с постоянным ускорением $a = e_x A_x + e_z a_z$ в однородном поле тяжести $g = -e_z g$. Найти наклон свободной поверхности жидкости.

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{a_x}{a_x + g}.$$

2. Оценить сплюснутость Земли, обучловленную ее осевым вращением, рассматривая Землю как однородный несжимаемый жидкий шар.

$$\epsilon = \frac{R_{\mathfrak{s}} - R_{\mathfrak{n}}}{R_0} = \frac{\Omega^2 R_0}{2g} \approx \frac{1}{580}$$

3. Жидкость, уравнение состояния которой имеет вид $p = \lambda \rho^{\gamma}$, вытекает из большого резервуара под давлением N через гладкую тонкую трубу. Определить скорость жидкости.

$$v^{2} = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \left(\frac{N}{N^{1/\gamma}} - 1 \right),$$

p, *ρ* взяты на свободной поверхности вытекающей струи.

4. Шар радиуса a, движущийся в идеальной несжимаемой жидкости со скоростью v_0 , создает поле скоростей

$$\boldsymbol{v} = \frac{a^3}{2r^5} \{ 3(\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{r}) \boldsymbol{r} - r^2 \boldsymbol{v}_0 \}.$$

Найти суммарный импульс системы шар + вовлекаемая им в движение жидкость.

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}_0.$$

5. В условиях предыдущей задачи найти кинетическую энергию системы шар + вовлекаемая им в движение жидкость.

$$E = \frac{1}{2}(m+M)v_0^2,$$

М — присоединенная масса, равная половине массы жидкости в объеме шара.

- 6. Показать, что в несжимаемой жидкости для увеличения радиуса цилиндрической оболочки требуется бесконечно большая сила на единицу длины цилиндра (при расширении цилиндра со скоростью v|_R = v₀ энергия жидкости на единицу длины цилиндра равна бесконечности).
- 7. Определить форму струи, вытекающей из бесконечно длинной щели прорезанной в плоской стенке.
- 8. Струйный насос

Соколов Е.Я., Зингер Н,М, Струйные аппараты. М: Энергоатомиздат. 1989. - 352 с.

9. Теория Эйлера для рабочего колеса насоса

Степанов Л.И. Центробежные и осевые насосы. М. Из-дво машиностроительной литературы. -462 с.

10. Доказать, что потенциальное течение несжимаемой жидкости в односвязной области обладает меньшей кинетической энергией, чем всякое другое течение с таким же распределением нормальной скорости на границе области.

Механика сплошных сред в задачах. В 2-х томах. М: Московский лицей. 1996. Т.1, стр. 183

11. Доказать, что поле скоростей, создаваемое в неорганиченном объеме несжимаемой идеальной жидкости, см. рис. 11.6, имеет следующий вид (закон Био-Савара):

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{R}}{R^3}, \quad R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\nu)^2 + (z-\zeta)^2},$$

 $\Gamma-$ циркуляция скорости по контуру, один раз охватывающему вихревую нить, см. рис. 11.6.



Puc. 11.6.

12. Рассмотрим течение в котором $\nabla \times v$ велик втонком слое толщиной δ . Поверхность, к которой стягивается этот слой при $\delta \to 0$, называется вихревой пеленой, если

$$\lim_{\delta \to 0} \delta \cdot \nabla \times \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\Omega},$$

 $\Omega \neq 0$ конечен и лежит в плоскости касательной к этой поверхности и называется поверхностной плотностью вихря.

Вихревая пелена возникает при обтекании клыла самолета и других тел, имеющих малый размер в направлении перпендикулярном скорости обтекания.

Доказать, что если поверхность S является вихревой пеленой, то $2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{n} = [\mathbf{v}]$, где $[\mathbf{v}]$ — скачек составляющей скорости, касательной к S, при переходе через нее в направлении \mathbf{n} .

Механика сплошных сред в задачах. В 2-х томах. М: Московский лицей. 1996. Т.1, стр. 194

13. Закрытый покоящийся сосуд, заполненный неоднородной жидкостью, мгновенно приводят в поступательное движение. Показать, что в сосуде возникает вихревое течение.

Механика сплошных сред в задачах. В 2-х томах. М: Московский лицей. 1996. Т.1, стр. 197 14. 22.46 Найти величину скорости обтекания шара однородным на бесконечности потоком воды, при котором начинается кавитация. Указать место, где она начинается. принять, что до возникновения кавитации течение безотрывное, давление в потоке вдали от шара равно атмосферному, а в каверне — нулю.

$$v_{\infty}=\sqrt{rac{8p_{\mathrm{atm}}}{5
ho}}=12.6$$
 м/с.

Указание

$$p = p_{\infty} + \rho v_{\infty}^2 \frac{1 - 2.25 \sin^2 \theta}{2}.$$

15. Известно, что крупные воздушные пузыри, всплывающие в воде, имеют форму сферического сегмента *ABC*, см. рис. 11.7. Доказать, что скорость всплытия такого пузыря

$$U = \frac{2\sqrt{gR}}{3}$$

где R — кривизна сферического сегмента.



Puc. 11.7.

Указания: из решения задачи об обтекании шара следует, что вблизи критической точки $B: v_r = 1.5U \sin \theta \approx 1.5 U \theta.$

Закон Бернулли

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} - gR(1 - \cos\theta) = const,$$

ИЛИ

$$\frac{p}{\rho} = \left(gR - \frac{9}{4}U^2\right)\frac{\theta^2}{2} + const,$$

откуда

$$U = \frac{2\sqrt{gR}}{3}$$

12 Изотермическое течение вязкой жидкости

12.1 Уравнение Навье-Стокса

Получим уравнение движения для жидкостей в которых соседние слои, движущиеся с разными скоростями, испытывают трение и происходит диссипация энергии. Для этого запишем в координатной форме уравнения движения идеальной изотермической жидкости и добавим в них описание процессов внутреннего трения.

Уравнение непрерывности:

$$\partial_t \rho + \partial_k (\rho v_k) = 0.$$

Уравнение Эйлера

$$\partial v_i = -v_k \partial_k v_i - \rho^{-1} \partial_i p$$

Вычислим скорость изменения импульса

$$\partial_t(\rho v_i) = v_i \partial_t \rho + \rho \partial_t v_i = -v_i \partial_k (\rho v_k) - \rho v_k \partial_k v_i - \partial_i p =$$
$$= -\partial_k (\rho v_i v_k + \delta_{ik} p) = -\partial_k \Pi_{ik},$$

или в интегральной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta V} \rho v_i \, dV = \oint_S \Pi_{ik} \, df_k,$$

слева стоит изменение в единицу времени импульса в объеме ΔV , справа — количество импульса, вытекающего из ΔV за единицу времени.

Значит, поток импульса, вытекающий через единицу поверхности df_k за единицу времени равен $\Pi_{ik}n_k$ (и численно равен силе $F_i = \Pi_{ik}n_k$, действующей на единицу поверхности df_k).

Поток импульса $\Pi_{ik}n_k = \rho v_i v_k n_k + p n_i$ обусловлен двумя механизмами: перемещением микрообъемов жидкости и действием сил давления на границы ΔV .

Влияние внутренних напряжений учтем, добавив тензор вязких напряжений σ'_{ik} :

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + \delta_{ik} p - \sigma'_{ik} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik}, \quad \sigma_{ik} = -p \delta i k + \sigma'_{ik}.$$

Внутреннее трение появляется при неоднородном течении жидкости и в линейном приближении зависит от первых производных компонент скорости по координатам

$$\sigma_{\alpha\beta}' = A\partial_{\beta}v_{\alpha} + B\partial_{\alpha}v_{\beta} + C\delta_{\alpha\beta}\partial_{\gamma}v_{\gamma},$$

А, В, С для изотропных жидкостей — скаляры не зависящие от скорости.

Внутреннее трение не возникает при вращении жидкости как целое с угловой скоростью Ω , т.е. при $v_{\alpha} = e_{\alpha i k} \Omega_i x_k$, т.е. должно быть $\sigma'_{\alpha \beta} = 0$

$$\sigma_{\alpha\beta}' = Ae_{\alpha ik}\Omega_i \frac{\partial x_k}{\partial x_\beta} + Be_{\beta ik}\Omega_i \frac{\partial x_k}{\partial x_\alpha} + C\delta_{\alpha\beta}e_{\gamma ik}\Omega_i \frac{\partial x_k}{\partial x_\gamma} = Ae_{\alpha i\beta}\Omega_i + Be_{\beta i\alpha}\Omega_i =$$
$$= (A - B)e_{\alpha i\beta}\Omega_i = 0, \quad \rightarrow \quad A = B,$$

И

$$\sigma_{\alpha\beta}' = A\partial_{\beta}v_{\alpha} + A\partial_{\alpha}v_{\beta} + C\delta_{\alpha\beta}\partial_{\gamma}v_{\gamma}.$$

Обычно тензор вязких напряжений записывают в следующей форме

$$\sigma_{ik}' = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

Выражение в круглых скобках имеет нулевой след. Коэффициент η называют динамической вязкостью, или просто вязкостью. Коэффициент ζ называют второй вязкостью. Оба коэффициента η , ζ могут зависеть от p и ρ . Можно показать, что $(\eta, \zeta) > 0$.

В несжимаемой жидкости $\partial_l v_l = 0$ и

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

а уравнение течения жидкости, уравнение Навье-Стокса, имеет следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_{i} = \rho \frac{\partial v_{i}}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_{k}} = -\frac{\partial}{\partial x_{k}} \left[p\delta_{ik} + \rho v_{i}v_{k} - \eta \left(\frac{\partial v_{i}}{\partial x_{k}} + \frac{\partial v_{k}}{\partial x_{i}} \right) \right] = \\ = -\frac{\partial p}{\partial x_{i}} - \rho v_{k} \frac{\partial v_{i}}{\partial x_{k}} + \eta \frac{\partial^{2} v_{i}}{\partial x_{k}^{2}}, \\ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^{2}\boldsymbol{v}, \qquad (12.1)$$

или

где $\nu = \mu/\rho$ — коэффициент кинематической вязкости или просто кинематическая вязкость, см. табл. 12.1.

Полная система уравнений, описывающих изотермическое течение несжимаемой жидкости, состоит из уравнения Навье–Стокса (15.4) и уравнения непрерывности

$$\nabla \boldsymbol{v} = 0. \tag{12.2}$$

Таблица 12.1. Кинематическая вязкость некоторых жидкостей

Жидкость	$ u$, см 2 /сек
Ртуть	0.0012
Вода	0.010
Воздух	0.150
Глицерин	6.8

Граничные условия для уравнений (15.4) и (17.2) определяются свойством жидкости "прилипать" к поверхности твердых тел (за счет сил межмолекулярного взаимодействия). Поэтому на твердых стенках всегда

$$\boldsymbol{v}=0.$$

Например, из-за того, что жидкости и газы "прилипают" к поверхности твердых тел, на лопастях вращающихся вентиляторов удерживается тонкий слой пыли.

Сила F_i , действующая на единицу поверхности твердого тела, соприкасающегося с жидкостью, равна $F_i = \prod_{ik} n_k = (\rho v_i v_k - \sigma_{ik}) n_k$, или, с учетом условия "прилипания"

$$F_i = -\sigma_{ik}n_k = pn_i - \sigma'_{ik}n_k,$$

это сила давления плюс сила трения, обусловленная вязкостью, а $-\sigma_{ik}$ — это i—ая компонента силы трения, действующей на единичную площадку перпендикулярную оси k.

12.2 Примеры течений с $(\boldsymbol{v} \nabla) \boldsymbol{v} = 0$

Рассмотрим течений для которых нелинейный член $(v\nabla)v = 0$, т.е уравнение Навье–Стокса линеаризуется, что существенно облегчает его решение. Более сложные течения будут описаны позже.

12.2.1 Течение Куэтта

Жидкость заключена между параллельными плоскостями, и верхняя плоскость движется со скоростью u. Пусть ось x направлена по направлению скорости, а x и z находятся в плоскости нижней пластины. Тогда $\boldsymbol{v} = (v(y), 0, 0), p(y)$ и для стационарного течения из (15.4) следует

$$\frac{d^2v}{dy^2} = 0, \quad \frac{dp}{dy} = 0.$$

Уравнение непрерывности удовлетворяется тождественно.

Граничные условия:

$$v(0) = 0, \quad v(h) = u.$$

Следовательно

$$v = \frac{y}{h}u, \quad p = const.$$

Напряжение трения

$$\sigma_{xy} = -\eta \frac{dv_x}{dy} = -\frac{\eta u}{h},$$

остальные компоненты тензора $\sigma_{ik} = 0$.

12.2.2 Течение Пуазейля между параллельными пластинками

Рассмотрим стационарное течение под действием разности давлений. Тогда $\boldsymbol{v} = (v(y), 0, 0)$ и уравнения (15.4) дают

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Из второго уравнения следует, что *p* не зависит от *y*. Тогда в первом уравнении левая часть является функцией *y*, а правая — функцией *x*. Такое уравнение имеет решение только если его левая и правая части константы. Следовательно

$$\frac{dp}{dx} = const < 0, \quad v = -\frac{1}{2\eta} \left| \frac{dp}{dx} \right| y^2 + ay + b.$$

Постоянные *a* и *b* определяются из граничных условий v(0) = v(h) = 0:

$$v = -\frac{1}{2\eta} \left| \frac{dp}{dx} \right| y(y-h).$$

Напряжение трения

$$\sigma_{xy} = -\eta \frac{dv_x}{dy}\Big|_{y=0} = \frac{h}{2} \left| \frac{dp}{dx} \right|.$$

12.2.3 Течение Пуазейля в трубе

Рассмотрим стационарное течение и ось x направим вдоль трубы. Тогда v = (v(y, z), 0, 0), уравнение непрерывности удовлетворится тождественно, y и z компоненты уравнения Навье–Стокса дадут: $\partial p/\partial y = \partial p/\partial z = 0$ а x-компонента

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx} = const.$$

Градиент давления запишем так

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{l},$$

 Δp — разность давлений, а l — длина трубы.

Для трубы круглого сечения v = v(r). Граничные условия v(R) = 0. Переходя в цилиндрические координаты, получим

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = -\frac{\Delta p}{\eta l},$$

откуда

$$v = -\frac{\Delta p}{4\eta l}r^2 + a\ln r + b, \quad \rightarrow \quad v = \frac{\Delta p}{8\eta l}(R^2 - r^2).$$

Напряжение трения

$$\sigma_{xr} = -\eta \frac{dv_x}{dr} \bigg|_{r=R} = \frac{\Delta p}{l} \frac{R}{2}.$$

Сила трения на единицу длины трубы

$$f_x = 2\pi R \cdot \sigma'_{xr} = \pi R^2 \frac{\Delta p}{l}.$$

12.2.4 Течение Куэтта между вращающимися цилиндрами

Рассмотрим стационарное течение между коаксиальными бесконечными цилиндрами радиусами R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$), вращающимися вокруг оси с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 .

Из симметрии задачи следует

$$v_z = v_r = 0, \quad v_\varphi = v(r), \quad p = p(r).$$

Уравнение Навье–Стокса в цилиндрических координатах

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{v^2}{r}, \quad \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0.$$

Решение уравнения для скорости ищем в виде $v = const \cdot r^n$. Подстановка этого решения в уравнение дает $n^2 = 1$, т.е. $n = \pm 1$, поэтому

$$v = ar + \frac{b}{r},$$

а поскольку $v(R_1) = R_1 \Omega_1, v(R_2) = R_1 \Omega_2$, то

$$v = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}.$$

Если внешний цилиндр не вращается $\Omega_2 = 0$

$$v = \frac{\Omega_1 R_1^2}{r}$$

Момент сил трения на единицу длины внутреннего цилиндра

$$M = \sigma'_{r\varphi}|_{r=R_1} \cdot R_1 \cdot 2\pi R_1,$$

$$\sigma'_{r\varphi} = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)\Big|_{r\varphi} = -2\eta \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)R_2^2}{R_2^2 - R_1^2},$$

$$M = -\frac{4\pi\eta(\Omega_1 - \Omega_2)R_1^2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

12.3 Закон подобия

Рассмотрим класс геометрически подобных задач, т.е. таких области течения которых могут быть получены друг из друга умножением всех размеров на некоторое число. Это означает, что форма границ области течения будет определена полностью, если известен любой ее размер L.

Жидкость будем считать несжимаемой, тогда ее свойства полностью определяются двумя величинами: ν, ρ.

Зададим также некоторое характерное значение скорость жидкости u, например, скорость натекающего потока.

Если имеется изменяющееся во времени внешнее воздействие, то в качестве масштаба времени T возьмем характерной интервал времени этого воздействия $T = \tau$. Если переменного внешнего воздействия нет, то T = L/u.

Введем безразмерные величины, которые будем обозначать теми же символами, но со штрихом:

$$x'_i = \frac{x_i}{L}, \quad t' = \frac{t}{T}, \quad v'_i = \frac{v_i}{u}, \quad p' = \frac{p}{\rho u^2}, \quad \nabla' = L\nabla, \quad \nabla'^2 = L^2 \nabla^2,$$

подставив их в уравнения (15.4) и (17.2), получим

$$\frac{u}{T}\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t'} + \frac{u^2}{L}(\boldsymbol{v}'\nabla')\boldsymbol{v}' = -\frac{\rho u^2}{\rho L}\nabla' p' + \frac{\nu u}{L^2}\nabla'^2 \boldsymbol{v}', \quad \frac{u}{L}\nabla' \boldsymbol{v}' = 0.$$

Сокращая общие множители и убрав штрихи, получим

$$\frac{L}{Tu}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + \frac{\nu}{Lu}\nabla^2\boldsymbol{v}, \quad \nabla \boldsymbol{v} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + \frac{1}{2}\nabla^2\boldsymbol{v}, \quad \nabla \boldsymbol{v} = 0,$$

$$\frac{1}{St}\frac{\partial t}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\nabla^2\boldsymbol{v}, \quad St = \frac{d^2}{L}, \quad Re = \frac{d^2}{\nu},$$

Re— называют числом Рейнольдса, а St— числом Струхала, если T = L/u, то St = 1. Решением задачи о течении жидкости будет нахождение функций f_1 и f_2 :

$$\boldsymbol{v} = u f_1\left(\frac{\boldsymbol{r}}{L}, Re, St\right), \quad p = \rho u^2 f_2\left(\frac{\boldsymbol{r}}{L}, Re, St\right).$$

12.4 Задания для самостоятельной работы

Часть А

1. Вывести уравнение для завихренности $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v}$ вязкой несжимаемой жидкости .

Заменив $(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}$ в уравнении Навье–Стокса согласно тождеству

$$\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2} \nabla v^2 - (\boldsymbol{v} \nabla) \boldsymbol{v},$$

получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}) + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}.$$

Поскольку

$$abla imes (oldsymbol{v} imes oldsymbol{\omega}) = (oldsymbol{\omega}
abla) oldsymbol{v} - (oldsymbol{v}
abla) oldsymbol{\omega},$$

то

$$rac{\partial oldsymbol{\omega}}{\partial t} + (oldsymbol{v}
abla)oldsymbol{\omega} = (oldsymbol{\omega}
abla)oldsymbol{v} +
u\Deltaoldsymbol{\omega}, \quad
ightarrow \quad rac{doldsymbol{\omega}}{dt} = (oldsymbol{\omega}
abla)oldsymbol{v} +
u\Deltaoldsymbol{\omega}.$$

2. Получить уравнение для изменения во времени циркуляции $\Gamma = \oint v \, dr$ вязкой несжимаемой жидкости.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\nu \oint \nabla \times \boldsymbol{\omega} \, d\boldsymbol{r}.$$

3. Вывести уравнение для завихренности и $d\Gamma/dt$ вязкой сжимаемой жидкости.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\int \left(\nabla p \times \frac{\nabla \rho}{\rho^2}\right) d\boldsymbol{f} - \nu \oint \nabla \times \boldsymbol{\omega} \, d\boldsymbol{r}.$$

4. Вывести уравнение для нахождения давления по известному полю скоростей вязкой жидкости.

Применив к уравнению Навье-Стокса, записанному в координатной форме

$$\partial_t v_i + v_k \partial_k v_i = -\frac{1}{\rho} \partial_i p + \nu \partial_k^2 v_i.$$

операцию ∂_i , получим

$$\nabla^2 p = -\rho \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

5. Почему при помешивании чая ложечкой чаинки собираются в центре дна стакана?

Вблизи свободной поверхности жидкости торможение (из-за вязкости) меньше, чем у стенок. Поэтому частицы жидкости, находящиеся на одинаковом расстоянии от оси вращения, имеют разные скорости: чем ближе к дну, тем скорость меньше, а равнодействующая сил бокового давления, см. рис. 12.1, $F_1 - F_2 = \rho g S \Delta h$ — одна и та же. Из-за чего у поверхности частицы жидкости отбрасываются центробежной силой к стенкам.

У дна угловая скорость жидкости меньше, а значит, меньше и центробежная сила и силы давления заставляют двигаться воду к центру, см. рис. 12.2.



Puc. 12.1.

Puc. 12.2.

6. Почему русла рек обычно извилистые?

На повороте поверхность реки наклонена и, см. рис. 12.3, $F_1 > F_2$. Также как в стакане (см. предыдущую задачу), скорость частиц воды у поверхности выше, чем у дна. Поэтому у поверхности вода "отбрасывается" к дальнему (от центра поворота) берегу. У дна вода движется к ближнему берегу (т.е. к центру поворота). Дополнительно к основному течению, см. рис. 12.3, возникает циркуляция воды. Эта циркуляция приводит к эрозии (разрушению) почвы: дальний берег (от центра поворота) подмывается, а у ближнего берега осаждается подмытая почва. Русло смещается, изгиб реки увеличивается.



Puc. 12.3.

Даже небольшой изгиб, возникший по случайным причинам, будет со временем увеличиваться. Прямолинейное течение реки неустойчиво. Изгибы реки называют меандрами, от древнегреческого названия реки Меандр в Турции, известной своими изгибами (современное название Большой Мендерес).

Отметим, что речники пользуются правилом: на поверхности реки скорость максимальна там, где глубже.

Известна также гипотеза: форма русла имеет форму изогнутой линейки (эйлерова кривая, из всех кривых заданной длины, соединяющих заданные точки, она менее изогнута, см. рис. 12.4). Которая обычно согласуется с экспериментальными данными, см. рис. 12.5, 12.6, где пунктиром показаны эйлеровы кривые.



Puc. 12.4.



Puc. 12.5.



Puc. 12.6.

7. Найти профиль скорости для течения Куэтта между двумя соосными цилиндрами радиусами R_1 (движется со скоростью u) и R_2 (покоится).

$$v(r) = A \ln r + B$$
, $v(R_1) = u$, $v(R_2) = 0$, $\rightarrow v(r) = u \frac{\ln r/R_1}{\ln R_2/R_1}$.

8. Рассчитать профиль скорости для течения Пуазейля между соосными цилиндрами.

$$v(r) = \frac{1}{4\nu} \frac{dp}{dx} r^2 + A \ln \frac{r}{R_1} + B, \quad v(R_1) = v(R_2) = 0,$$
$$v(r) = -\frac{R_1^2}{4\nu} \frac{dp}{dx} \left[1 - \frac{r^2}{R_1^2} + \left(\frac{R_2^2}{R_1^2} - 1\right) \frac{\ln r/R_1}{\ln R_2/R_1} \right].$$

9. Как изменится профиль скорости для течения Пуазейля в поле тяжести, когда труба составляет улол *α* с горизонтом?

$$\frac{dp}{dx} \to \frac{dp}{dx} + \rho g \sin \alpha.$$

Часть В

1. Вычислить объемную мощность диссипации энергии в несжимаемой вязкой жидкости.

Вязкость приводит к превращению кинетической энергии жидкости Е в тепло.

$$E = \int \left(\frac{\rho v_i^2}{2}\right) \, dV.$$

Вычислим скорость диссипации кинетической энергии в несжимаемой изотермической жидкости, т.е. считаем $\rho = const$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v_i^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = \rho v_i \partial_t v_i.$$

Из закона сохранения импульса

$$\rho \partial_t v_i = -\nabla_k \Pi_{ik} = -\nabla_k (\rho v_i v_k + p \delta_{ik} - \sigma'_{ik}) = -\rho v_k \nabla_k v_i - \nabla_i p + \nabla_k \sigma'_{ik},$$

тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v_i^2}{2} \right) = -\rho v_i v_k \nabla_k v_i - v_k \nabla_k p + v_i \nabla_k \sigma'_{ik} = = -\rho v_k \nabla_k \left(\frac{v_i^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) + \nabla_k (v_i \sigma'_{ik}) - \sigma'_{ik} \nabla_k v_i =, = -\nabla_k \left[\rho v_k \left(\frac{v_i^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) - v_i \sigma'_{ik} \right] - \sigma'_{ik} \nabla_k v_i.$$

Откуда

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{\rho v_i^2}{2}\right) dV = -\oint \left[\rho v_k \left(\frac{v_i^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) - v_i \sigma'_{ik}\right] df_k - \int \sigma'_{ik} \nabla_k v_i dV.$$

Первое слагаемое в правой части описывает изменение кинетической энергии жидкости в выделенном объеме за счет ее перетока через поверхность. Второе слагаемое описывает уменьшение энергии в выделенном объеме за счет внутреннего трения.

Распространим интегрирование по всему объему, тогда интеграл по поверхности обратится в ноль (рассматриваем движение жидкости в системе координат, в которой на бесконечности жидкость покоится). Получим, что скорость диссипации энергии в объеме равна

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\rho v^2}{2} dV = -\int \sigma'_{ik} \nabla_k v_i \, dV =$$
$$= -\frac{1}{2} \int \sigma'_{ik} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \, dV = -\frac{\eta}{2} \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 \, dV. \tag{12.3}$$

- Вертикальная труба радиусом R заполнена вязкой несжимаемой жидкостью. Вдоль оси трубы помещен длинный L ≫ R невесомый цилиндр, радиус которого мало отличается от радиуса трубы, так что между ними остается узкий зазор толщиной h ≪ R. Найти скорость всплывания цилиндра в поле тяжести g.
- Вязкая жидкость движется между двумя параллельными плоскостями при наличие постоянного градиента давления. Верхняя плоскость движется относительно нижней с постоянной скоростью. Найти и проанализировать профиль скорости.
- 4. Слой жидкости толщиной h (по перпендикуляру ОZ к свободной поверхности) стекает по наклоненной под углом α к горизонту неподвижной плоскости параллельно лежащей в ней оси ОХ. Найти поле скоростей, давлений и расход жидкости Q (отнесенное к единице длины поперечной оси ОУ количество жидкости, протекающее через поперечное сечение слоя в единицу времени).

$$v = z(2h-z)\frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta}, \quad p = p_0 + \rho g \cos \alpha \cdot (h-z), \quad Q = \frac{\rho g h^3 \sin \alpha}{3\nu}$$

5. Найти профиль скоростей и расход вязкой жидкости в трубе с кольцевым сечением (внутренний радиус R_1 , внешний — R_2).

$$Q = \frac{\pi}{8\nu} \left| \frac{dp}{dx} \right| \left(R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln(R_2/R_1)} \right).$$

6. Найти профиль скоростей и расход вязкой жидкости в трубе эллиптического сечения (*a* и *b* — полуоси эллипса).

$$Q = \frac{\pi}{4\nu} \left| \frac{dp}{dx} \right| \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

7. Цилиндр радиуса R_1 поступательно движется со скоростью u внутри коаксиального с ним цилиндра радиуса R_2 параллельно общей оси. Определить поле скоростей вязкой жидкости, заполняющей пространство между цилиндрами.

$$v(r) = u \frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)}.$$

8. Бесконечный цилиндр радиуса *R*, погруженный в вязкую жидкость, вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью. Найти поле скоростей.

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Omega R^2}{r} \boldsymbol{e}_{\varphi}.$$

 Вязкая жидкость находится между двумя, бесконечными коаксиальными цилиндрами, внутренний цилиндр неподвижен, внешний вращается с постоянной угловой скоростью. Определить поле скоростей.

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) \boldsymbol{e}_{\varphi}.$$

10. Шар радиусом Rвращается с постоянной угловой скоростью Ω в вязкой жидкости. Найти поле скоростей.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r} \frac{1}{R^3}, \quad r > R.$$

11. В условиях предыдущей задачи вычислить момент сил трения, действующих на шар.

$$K_z = -8\pi\eta R^3\Omega.$$

13 Примеры изотермических течений вязкой жидкости

13.1 Течение Стокса

Рассмотрим стационарное обтекание сферы радиуса R несжимаемой жидкостью, имеющей на бесконечности скорость u, см. рис. ??. Течение описывается следующей системой уравнений

$$(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{v}' \quad \nabla\boldsymbol{v} = 0.$$

Основные сложности при решении этих уравнений возникают из-за нелинейного слагаемого, стоящего в правой части первого уравнения. Он описывает изменение скорости из-за перемещения жидкой частицы и по порядку величины равен u^2/l . Последнее слагаемое в левой части этого уравнения описывает изменение скорости из-за вязкого трения и по порядку величины равно $\nu u/l^2$. Нелинейным слагаемым можно пренебречь, если

$$rac{u^2}{l} \ll rac{
u u}{l^2},$$
 или $Re = rac{ul}{
u} \ll 1,$

т.е. когда скорость мала и уравнение Навье-Стокса линеаризуется. Тогда можно получить аналитическое решение задачи об обтекании сферы вязкой жидкостью.

Система уравнений, описывающих медленное обтекание сферы принимает вид

$$\eta \Delta \boldsymbol{v} = \nabla p, \quad \nabla \boldsymbol{v} = 0.$$

Скалярно умножив первое уравнение на ∇ , получим:

$$abla^2 p = 0, \quad \rightarrow \quad p = p_0 + c \frac{\boldsymbol{n} \boldsymbol{u}}{r^2} = p_0 + c \frac{u \cos \theta}{r^2}, \quad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

учтено, что поле давлений линейно зависит от скорости u (т.к. задача линейная), которая может входить в решение уравнения Лапласа только в виде скалярного произведения u на n.

Вычислим градиент давления

$$\nabla p = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial p}{\partial r} + \boldsymbol{e}_{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_{\varphi} \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = -\frac{cu}{r^3} (\boldsymbol{e}_r 2 \cos \theta + \boldsymbol{e}_{\theta} \sin \theta).$$

Его решение будем искать в виде

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}',$$

где

$$\eta \Delta \boldsymbol{v}' = \nabla p, \quad \nabla \boldsymbol{v}' = 0.$$

13.2 Течение вблизи вращающегося диска

13.3 Течение в диффузоре и конфузоре

13.4 Течение вблизи колеблющейся стенки

13.5 Задания для самостоятельной работы

1. Две параллельные плоские круглые пластинки радиуса *R* сближаются с постоянной скоростью *u*, вытесняя находящуюся между ними жидкость. Найти зависимость давления от расстояния до центра.

$$p = p_0 + \frac{3\nu u}{h^3} (R^2 - r^2).$$

2. Бесконечная пластина, ограничивающая вязкую жидкость, совершает в своей плоскости YZ простое гармоническое колебание с частотой ω . Найти возбуждаемое ей движение жидкости (x > 0) и глубину проникновения волны δ (расстояние, на котором ее амплитуда падает в *е* раз).

$$v_y(x,t) = v_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega\rho}{2\eta x}}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{\omega\rho}{2\eta x}} - \omega t\right), \quad \delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho}}$$

3. Используя метод размерностей, вывести общую формулу для силы сопротивления движению в жидкости с плотностью ρ, вязкостью η и скоростью звука с шара радиуса R, движущегося с постоянной скоростью v.

$$F = \rho v^2 R^2 f\left(\frac{\rho v R}{\eta}, \frac{v}{c}\right).$$

4. Получить выражение для вязких волн между двумя параллельными стенками, находящимися на расстоянии d, если одна покоится, а другая колеблется в своей плоскости по закону $v = v_0 \exp(-i\omega t)$.

Пусть стенки находятся в плоскости (x, y), тогда граничные условия

$$v_x|_{z=0} = v_0 \exp^{-i\omega t}, \quad v_y|_{z=0} = v_z|_{z=0} = 0;$$

 $v_x|_{z=h} = v_y|_{z=h} = v_z|_{z=h} = 0.$

Из симметрии задачи: $\boldsymbol{v} = [v(z), 0, v_z(z)].$

Из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad \to \quad v_z = const = 0.$$

Из уравнения Навье–Стокса

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2},$$

обозначим $v_z = v$.

Ищем решение в виде $v = const \exp^{i(kz-\omega t)}$, тогда

$$-i\omega = -\nu k^2, \quad \to \quad k = \pm \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} = \pm \sqrt{\frac{\exp(i\pi/2)\omega}{\nu}} = \pm e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

Поэтому общее решение будет иметь следующий вид

$$v = (A'e^{ik(h-z)} + B'e^{-ik(h-z)})e^{-i\omega t} = (A\operatorname{sh}[k(h-z)] + B\operatorname{ch}[k(h-z)])e^{-i\omega t}.$$

Из $v|_{z=h} = 0$ следует B = 0. Из $v|_{z=0} = v_0$ следует

$$A \operatorname{ch} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} h = v_0, \quad A \operatorname{sh}(1+i)\alpha = v_0,$$
$$v = v_0 \frac{\left[(1+i)\alpha(1-z/h)\right]}{\operatorname{sh}\left[(1+i)\alpha\right]} e^{-i\omega t}.$$

5. Плоское «дно» бесконечно глубокой вязкой несжимаемой жидкости приводится в движение со скоростью v = v₀ cos ωt, совершая линейно поляризованные колебания в плоскости дна. Найти поле скоростей и среднюю мощность, необходимую для поддержания этих колебаний.

Пусть жидкость занимает область z > 0, а дно колеблется вдоль оси x. Общее решение будет иметь следующий вид

$$v = \left(Ae^{ikz} + Be^{-ikz}\right)e^{-i\omega t},$$

где

$$k = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}.$$

Решение, обращающее в нуль при $z \to \infty$

$$v = v_0 \exp\left\{-\frac{(1-i)z}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right\},$$

или

$$v(z,t) = v_0 e^{-z\sqrt{\omega/2\nu}} \left[\cos \omega t \cos \left(z\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \right) + \sin \omega t \sin \left(z\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \right) \right].$$

Сила, приводящая единицу площади дна в движение

$$F_x = -\eta \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = v_0 \eta \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} (\cos \omega t + \sin \omega t).$$

Средняя мощность, расходуемая за период

$$\langle vF_x \rangle = \frac{v_0\eta}{2}\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} = \frac{\rho v_0^2}{2}\sqrt{\frac{\omega\nu}{2}}.$$

- 6. В кювете на тонком (по сравнению с ее поперечными размерами) слое вязкой жидкости толщины h плавает пластина, масса единицы площади которой равна μ. Дно кювета совершает малые колебания в своей плоскости с амплитудой и частотой ω. Найти амплитуду колебаний пластины.
- Плоское дно бесконечно глубокой вязкой несжимаемой жидкости в момент t = 0 мгновенно начинает двигаться в собственной плоскости с постоянной скоростью u₀. Определить движение жидкости и силу сопротивления, испытываемую единицей площади дна.

8.

9.

10.

14 Пограничный слой и отрыв течения

14.1 Явление отрыва и след

Если шар омывается жидкостью, натекающей с постоянной скоростью **u**, то при условии:

$$|(\boldsymbol{v} \nabla) \boldsymbol{v}| \ll |\nu \Delta \boldsymbol{v}|,$$
 или $Re \ll 1,$

поле скоростей имеет следующий вид, см. рис. ??:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} - \frac{3R}{2r}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{n})) + \frac{R^3}{4r^3}(3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{n}) - \boldsymbol{u}).$$

Оно обладает плоскостями симметрии, проходящими через центр шара: отражение низ-верх, лево-право.

Однако, это решение применимо только в области примыкающей к шару, поскольку на больших расстояниях от шара $v \sim u$, первая производная от скорости $\sim uR/r^2$, вторая производная $\sim uR/r^3$, следовательно

$$|(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}| \sim u^2 \frac{R}{r^2}, \quad |\nu \Delta \boldsymbol{v}| \sim u \nu \frac{R}{r^3}, \quad \frac{|(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}|}{\nu \Delta \boldsymbol{v}|} \sim \frac{ur}{\nu} \ll 1, \quad$$
или $r \ll \frac{\nu}{u}.$

Это означает, что решение справедливо внутри вязкого погранслоя толщины ν/u . За пределами погранслоя окружающего шар течение примерно такое же, как в идеальной жидкости.

При увеличении скорости шара (числа Рейнольдса), поле скоростей существенным образом меняется: возникает новое явление — след. След это особая область течения, где завихренность $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v} \neq 0$. Она начинается от шара и уходит в бесконечность, а возникает при любой, даже как угодно малой вязкости.

Механизм формирования следа состоит в том, что на поверхности шара генерируется завихренность. Поскольку, см. рис. ??, скорость $\boldsymbol{v} = (v_x(z), 0, 0)$, то

$$\boldsymbol{\omega} =
abla imes \boldsymbol{v} = \boldsymbol{j} \frac{\partial v_x}{\partial z} \neq 0,$$

хотя в потоке жидкости натекающей на шар $\boldsymbol{\omega} = 0.$

Эволюция завихренности описывается уравнением

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}, \qquad (14.1)$$

которое выводится следующим образом: в уравнении Навье–Стокса заменим $(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}$ на $\nabla(\boldsymbol{v}^2/2) - \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v})$ и умножим полученное выражение векторно на ∇ .

Первое слагаемое в правой части уравнения (14.1) описывает инерционный перенос завихренности, второе — диффузию завихренности.

При $Re \ll 1$ инерционный перенос мал и завихренность распростнаняется от поверхности шара одинаково во все стороны, поле скоростей обладает примерно той же симметрией, что и в случае потенциального течения идеальной жидкости (точная симметрия относительно верх–низ, и почти точная, в силу малости Re, относительно право–лево).

При больших числах Рейнольдса становится существенным вклад инерционного переноса завихренности. Образуется след, который нигде не заканчивается и уходит в бесконечность. Если бы след заканчивался, то область жидкости включающей весь след обтекалась бы потенциальным течением, а, значит, действующая на нее суммарная сила равнялась бы нулю.

- 14.2 Ламинарный и турбулентный след при обтекании цилиндра
- 14.3 Сила сопротивления и подъемная сила
- 14.4 Погранслой на пластинке, качественные соображения
- 14.5 Задания для самостоятельной работы
 - 1.
 - 2.
 - 3.
 - .
 - 4.
 - 5.

15 Турбулентность, RANS подход

15.1 Введение

Характерная величина скорости жидкости u в проточных каналах УЭЦН порядка 1 м/сек, т.е. много меньше скорости звука, поэтому описывается уравнением Навье-Стокса для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j u_k \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_j}, \tag{15.1}$$

где σ_{jk} — тензор вязких напряжений

$$\sigma_{jk} = \nu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \tag{15.2}$$

v — кинематическая вязкость, и уравнением непрерывности

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0. \tag{15.3}$$

Из (15.1)–(15.3) получается следующая форма уравнения Навье-Стокса (15.1):

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j u_k \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \tag{15.4}$$

Поскольку характерная ширина каналов l = 1...2 см, характерная вязкость жидкости $\nu \sim 1$ сСт, то число Рейнольдса $Re = ul/\nu \sim 10^4$, т.е. течение турбулентное.

15.2 Уравнение Рейнольдса

В соответствии с подходом Рейнольдса [?], запишем поля скоростей и давлений в форме: среднее значение плюс пульсации (пульсации — случайные величины со средним значением равным нулю)

$$u_k = \langle u_k \rangle + u'_k = U_k + u'_k, \qquad p = \langle p \rangle + p' = P + p', \tag{15.5}$$

подставляя (15.5) в (15.4), получим уравнения Рейнольдса для средних значений полей скоростей и давлений:

$$\frac{\partial U_k}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_k}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \langle u'_j u'_k \rangle \right).$$
(15.6)

Данный способ моделирования турбулентности получил название RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes). Уравнения (15.6) содержат корреляционные функции пульсаций скорости $\langle u'_i u'_k \rangle$, которые также называются напряжениями Рейнольдса.

Напряжения Рейнольдса являются дополнительными неизвестными, поэтому система уравнений (15.6) не замкнута. Для ее замыкания напряжения Рейнольдса $\langle u'_j u'_k \rangle$ выражают через среднюю скорость в той же форме, как вязкие напряжения (15.2) зависят от скорости [?] (гипотеза Буссинеску):

$$-\langle u_j' u_k' \rangle = \nu_t \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \delta_{jk} k, \qquad (15.7)$$

где

$$k = \left\langle \frac{u_k' u_k'}{2} \right\rangle,\tag{15.8}$$

k — плотность кинетической энергии турбулентных пульсаций, δ_{jk} — символ Кронеккера, ν_t — турбулентную вязкость, которая является функцией характеристик турбулентного течения и свойств жидкости (при j = k (15.7) превращается в тождество, если учесть уравнение непрерывности).

Подставляя (15.7) в уравнение (15.6) и учитывая уравнение непрерывности (15.3), получим окончательный вид уравнения Рейнольдса:

$$\frac{\partial U_k}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \nu_t) \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right).$$
(15.9)

Турбулентная вязкость ν_t имеет размерность L^2/T , определяется флуктуациями скорости и потому может быть записана в следующем виде:

$$\nu_t \sim \cdot u_* \cdot L,\tag{15.10}$$

где u_* — характерная величина турбулентных флуктуаций скорости, L — их характерный размер, а ~ знак пропорциональности. Естественно определить $u_* = \sqrt{k}$, тогда

$$\nu_t = F_{\nu}(Re)\sqrt{k}L = F_{\nu}\left(\frac{\sqrt{k}L}{\nu}\right)\sqrt{k}L.$$
(15.11)

Re — число Рейнольдса. Зависимость $F_{\nu}(\sqrt{k}L/\nu)$, как и ее аргументы k и L пока не определены. RANS модели, основанные на гипотезе (15.7) получили название полуэмпирических, поскольку для их детализации используются экспериментальные данные, полученные для течений, выбранных в качестве базовых.

Наиболее развитыми и широко применяемыми являются следующие модели, определяющие зависимость турбулентной вязкости от характеристик течения [?]:

- 1. Модели нулевого порядка, основанные на гипотезе о локальном равновесии моделируемой турбулентности: не учитывается перенос турбулентной энергии из соседних точек и предыстория процесса;
- 2. Модели с одним дополнительным дифференциальным уравнением, описывающим перенос турбулентной энергии и предысторию процесса;
- 3. Модели с двумя дополнительными дифференциальными уравнениями.

15.3 Модели нулевого и первого порядка

В моделях нулевого порядка полагают, что турбулентная вязкость ν_t является алгебраической функцией осредненных характеристик течения. Эти модели хорошо работают только при анализе тех потоков, на которые они были предварительно настроены: для расчета простых сдвиговых течений, таких как след за обтекаемым телом (см. рис. 15.1, а, [?]), слой смешения (см. рис. 15.1, b, [?]), плоская и круглая струя (см. рис. 15.1, с, [?]).

В моделях турбулентности с одним дополнительным дифференциальным уравнением, система уравнений непрерывности (15.3) и Рейнольдса (15.6) дополняются уравнением переноса для кинетической энергии турбулентных пульсаций k или турбулентной вязкости ν_t .



Рис. 15.1. Сдвиговые потоки

Уравнение для k получают так: умножают уравнение Навье-Стокса (15.4) на u_k , применяют к полученному выражению преобразования Рейнольдса (15.5) и осредняют. Получаемое уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial D_j}{\partial x_j} + P - \varepsilon_s, \qquad (15.12)$$

где

$$D_j = \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \delta_{jk} \langle u'_k p' \rangle - \langle u'_j k \rangle, \qquad (15.13)$$

диффузионный член, обусловлен молекулярной диффузией и перемешиванием за счет взаимодействия пульсаций скорости и давления. Слагаемое

$$P = -\langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial U_k}{\partial x_j},\tag{15.14}$$

описывает генерацию турбулентности, (перенос энергии от крупных вихрей к мелким), и определяется произведением рейнольдсовских напряжений и средних градиентов скорости. С учетом (15.7) и (15.3) выражение (15.14) можно преобразовать к следующему виду

$$P = \nu_t \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_j}\right) \frac{\partial U_k}{\partial x_j}.$$
(15.15)

Последнее слагаемое в правой части (15.12) описывает диссипацию энергии мелкими вихрями и имеет следующий вид:

$$\varepsilon_s = \nu \left\langle \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right\rangle. \tag{15.16}$$

Неизвестными в уравнении (15.12), помимо k, являются $\langle u'_k p' \rangle$, $\langle u'_j k \rangle$, ε_s , а также рейнольдсовы напряжения $\langle u'_j u'_k \rangle$. Для замыкания уравнения обычно делают следующие предположения:

1. Полагают, что диффузионный перенос имеет градиентный характер:

$$-\frac{1}{\rho}\delta_{jk}\langle u_k'p'\rangle - \langle u_j'k\rangle = \frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_j},$$

где σ_k — эмпирическая константа, ν_t — турбулентная вязкость, см. (15.7) и (15.11). Тогда

$$D_j = \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}.$$
(15.17)

2. Вместо ε_s вводят ε — скорость диссипации турбулентной энергии в единице массы жидкости [?]:

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2} \left\langle \left(\frac{\partial u'_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle = \varepsilon_s + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u'_j u'_k \rangle \approx \varepsilon_s.$$
(15.18)

Приближенное неравенство в правой части уравнения выполняется тем точнее, чем однороднее турбулентность, т.е. если все компоненты рейнольдсовых напряжений $\langle u'_{i}u'_{k}\rangle$ слабо зависят от координат.

Скорость диссипации турбулентной энергии в единице массы жидкости, см. (15.18), имеет размерность L^3/T^2 . В случае однородной и изотропной турбулентности (т.е. в пределе больших чисел Рейнольдса) [?]

$$\varepsilon \sim \frac{u_*^3}{L},$$
 (15.19)

или

$$\varepsilon = c_D \frac{k^{3/2}}{L}.\tag{15.20}$$

Окончательно, уравнение для турбулентной энергии принимает следующий вид:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} + \nu_t \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \frac{C_D k^{3/2}}{L}.$$
 (15.21)

Это одна из форм записи уравнения переноса турбулентной энергии, соответствующая большим числам Рейнольдса.

Полагая, что при увеличении числа Рейнольдса $F_{\nu}(Re) \rightarrow c_{\nu} = const$, из (15.11) получим выражение для ν_t в (15.21):

$$\nu_t = c_\nu \sqrt{kL}.\tag{15.22}$$

Для замыкания уравнений (15.9), (15.3) и (15.21) следует задать константы c_D, c_ν, σ_k и характерный масштаб турбулентных вихрей *L*. Необходимость задания размера вихрей существенно затрудняет практическое применение уравнения (15.21), поэтому в настоящее время оно не применяется. Ценность этой модели заключается в предложенном методе получения дополнительного дифференциального уравнения (15.21), с которым система уравнений (15.9) и (15.3) для средних значений скоростей и давлений становится полной.

Самой популярной моделью первого порядка является модель Спаларта-Аллмараса (SA модель), предложенная в 1992 году [?]. В ней дополнительное дифференциальное уравнение записывается для турбулентной вязкости ν_t , точнее для модифицированной турбулентной вязкости $\tilde{\nu}_t$ и имеет примерно такую же структуру, как и рассмотренное выше уравнение для турбулентной энергии (15.21). Уравнение для $\tilde{\nu}_t$ не содержит характерного масштаба турбулентности L. Вместо L используется расстояние до ближайшей твердой поверхности d_w , т.е. величина с ясным физическим смыслом.

Граничные условия к уравнению для $\tilde{\nu}_t$ задаются следующим образом. На твердых стенках задается условие прилипания $\tilde{\nu}_t = 0$. На входных участках внешней границы расчетной области, при расчетах течения с развитой турбулентностью, рекомендуется положить $\tilde{\nu} = (1...5)\nu$ [?], а на выходных — величина $\tilde{\nu}_t$ экстраполируется на границу из внутренних точек области. Модель SA создавалась прежде всего для задач расчета внешней дозвуковой аэродинамики, обтекания профилей и крыльев [?]. Однако опыт ее применения показал, что реальные возможности модели заметно шире, чем предполагалось при создании.

Так помимо обтекания крыловых профилей, модель SA оказалась применимой для моделирования течения в каналах переменного сечения [?]. На рис. 15.2 приведена геометрия канала с обращенной назад ступенью, а на рис. 15.3 сопоставлены экспериментальные данные и результаты расчетов распределения коэффициента трения вдаль нижней стенки. Видно, что полученные зависимости близки. Кроме того, при $\alpha = 0$, см. рис. 15.2, длина отрывной зоны в эксперименте и расчете отличались на 2%, при $\alpha = 6^0$ всего на 6%.



Рис. 15.2. Схема эксперимента по обтеканию обращенной назад ступени



Рис. 15.3. Распределение коэффициента трения вдаль нижней стенки

15.4 Модели второго порядка

Модели турбулентности с двумя дополнительными дифференциальными уравнениями основываются на гипотезе Буссинеску (15.7) и выражении для входящей в (15.7) турбулентной вязкости (15.22): $\nu_t = c_{\nu}\sqrt{kL}$, справедливом в приближении больших чисел Рейнольдса.

Основная проблема построения модели турбулентности в этом подходе состоит в определении характерного масштаба турбулентных вихрей *L*. Однако, развитая турулентность (мы рассматриваем приближение больших чисел Рейнольдса) содержит все масштабы вихрей от макроскопических, порядка характерного масштаба осредненного течения, до микроскопических, колмогоровского масштаба

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4},\tag{15.23}$$

в которых турбулентная энергия диссипирует в тепловую.

Наглядное представление об этих масштабах дает рис. 15.4 на котором изображена типичная зависимость кинетической энергии турбулентности от волнового числа турбулентных вихрей при высоких числах Рейнольдса. Этот спектр имеет три области.



Рис. 15.4. Типичная зависимость энергии турбулентных вихрей от их волнового числа

Область I соответствует крупномасштабным вихрям с размерами порядка линейного масштаба рассматриваемого течения L_0 (ему отвечает волновое число $k_I = 2\pi/L_0$), черпающим энергию из осредненного течения.

В области III доминируют мелкие вихри с размерами меньше колмогоровского масштаба и волновыми числами $k > k_d = 2\pi/\eta$, вязкая диссипация которых переводит кинетическую энергию турбулентности в тепло.

Область II (инерционный интервал), лежащая между областями I и III, соответствует вихревым структурам с размерами в диапазоне $L_0 < l < \eta$. Влияние вязкости в этой области никак не проявляется, и энергия турбулентности не генерируется и не диссипирует, а лишь передается от более крупных вихрей к менее крупным. Энергетический спектр в области II описывается законом Колмогорова $E \sim k^{-5/3}$ [?].

Из этого рассмотрения следует, что наиболее энергонесущие вихри имеют масштаб определяемый осредненным течением. Однако, используя гипотезу Буссинеску, мы не можем рассчитать осредненное течение, пока не определили турбулентную вязкость, которая сама зависит от характерного масштаба течения, которое мы должны рассчитать.

Для преодоления этого противоречия выбирают класс течений, для описания которых разрабатывается модель, и используют эмпирические данные. Модель Рейнольдса дополняют двумя уравнениями.

Первое — для турбулентной кинетической энергии (15.21).

Второе уравнение нужно, чтобы вычислить ν_t , оно не обязательно должно быть для L. Искомой величиной может быть любая комбинация вида $Z = k^m L^n$. Широкое распространение получила модель с m = 3/2, n = -1, т.е. $Z = k^{3/2}/l$. Так определенная Z пропорциональна скорости диссипации турбулентной энергии $\varepsilon = c_D k^{3/2}/L$, см. (15.20).

Поскольку масштаб L однозначно не определен, а $\nu_t = c_{\nu}\sqrt{k}/L$, полагают $c_{\nu} = 1$. Затем из (15.20) выражают $L = c_D k^{3/2} / \varepsilon$ и подставив в выражение (15.22) для ν_t окончательно получают:

$$\nu_t = C_D \frac{k^2}{\varepsilon}.\tag{15.24}$$

Тогда уравнение (15.21) для k принимает следующий вид:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} + P_k - \varepsilon.$$

Существует, по крайней мере, два способа получения уравнения для ε . Во-первых, это уравнение можно вывести из уравнений Навье-Стокса (продифференцировав его по x_k , затем умножив результат на $\partial u'_k / \partial x_k$ и осреднив по Рейнольдсу). Полученное уравнение будет содержать различные корреляции, которые путем дополнительных, в значительной степени произвольных предположений, выражают через осредненные параметры потока. Во-вторых, можно записать уравнение переноса для ε в форме аналогичной уравнению для k, предположив, что генерация и диссипация ε пропорциональны аналогичным величинам в уравнении для k. Получим

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right) \frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j} + c_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k - c_2 \frac{\varepsilon}{k} \varepsilon, \qquad (15.25)$$

множитель ε/k имеет размерность 1/T. Он водится для того, чтобы размерности слагаемых были одинаковыми.

Данная модель предназначена для описания высокорейнольдсовых течений и не пригодна для расчета погранслоев, где число Рейнольдса мало. Существует два подхода к решению этой проблемы: использование пристенных функций или создание низкорейнольдсовых версий модели. Пристенные функции позволяют использовать более грубую сетку и потому более удобны для расчета течений в областях со сложной геометрией, таких как проточные каналы газосепараторов. Кроме того, этот подход позволяет учесть шероховатость поверхности проточных каналов (используется эмпирическая информация).

15.5 Модель погранслоя

Пристенная область может быть разбита на следующие зоны:

- 1. Вязкий подслой, в котором вязкие напряжения много больше рейнольдсовых.
- 2. Буферный слой, где вязкие напряжения порядка рейнольдсовых.
- 3. Логарифмический слой, где вязкие напряжения много меньше рейнольдсовых.

Профиль скорости в пристенной области универсален, одинаков для всех течений. Действительно, если направить ось ОХ вдоль осредненной скорости течения, а ОУ перпендикулярно течению, то из уравнений Рейнольдса (15.6) для сдвиговых течений (т.е. $\nabla p = 0$) получим

$$\nu \frac{d^2 U_x}{dy^2} - \frac{d}{dy} \langle u'_x u'_y \rangle = 0,$$

$$\sigma_{xy} = \rho \nu \frac{dU_x}{dy} - \rho \langle u'_x u'_y \rangle = \tau_0 = const.$$
(15.26)

откуда

Можно показать [?], что
$$\tau_0 = const$$
 и для течений в каналах, если $y \ll H_1, H_1 -$ полуширина канала.

В вязком подслое, который определяется так: $\nu|dU_x/dy|\gg\rangle|u_x'u_y'|\rangle,$ из (15.26) следует

$$\tau_0 = \rho \nu \frac{dU_x}{dy}.$$

Введем величину $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$, имеющую размерность скорости, тогда

$$U_x = u_* \frac{yu_*}{\nu}, \quad \text{или} \quad \frac{U_x}{u_*} = y \frac{u_*}{\nu}, \quad \text{или} \quad \frac{U_x}{u_*} = \frac{y}{y_*}.$$
 (15.27)

Согласно экспериментальным данным [?] толщина вязкого подслоя $\delta_{\nu} \simeq 5 y_*$.

В развитом турбулентном слое, в котором вязкие напряжения много меньше рейнольдсовых $\nu |dU_x/dy| \ll \langle |u'_x u'_y| \rangle$, из теории подобия следует:

$$\frac{dU_x}{dy} = f(\rho, \tau_0, y) = F\left(\frac{u_*}{y}\right) \simeq A\frac{u_*}{y},$$

где функцию $F(u_*/y)$ разложили в ряд Тейлора. Тогда

$$U_x(y) = u_*(A \ln y + B). \tag{15.28}$$

Согласно экспериментальным данным [?] профиль скорости (15.28) соответствует экспериментальным данным при $y \in (30y_*, 500y_*)$ при A = 2.4, B = 5.8.

Обычно, см. [?], считают, что при $y \leq 11.1y_*$ профиль скорости имеет вид (15.27), при $y > 11.1y_*$ — имеет вид (15.28). Возникающее при этом расхождение с экспериментальными данными не велико и такая экстраполяция получила широкое распространение.

Вычислим коэффициент турбулентной вязкости для логарифмического турбулентного подслоя, из (15.26) и (15.7) следует:

$$\tau_0 = \rho \nu_t \frac{dU_x}{dy} = \rho \nu_t \frac{d}{dy} (u_* A \ln y + u_* B) = \rho \nu_t u_* \frac{A}{y},$$
$$\nu_t = u_* \frac{y}{A},$$

откуда видно, что коэффициент турбулентной вязкости линейно растет по мере удаления от твердой стенки. На границе логарифмического подслоя, ближней к стенке, т.е. при $y = 30y_*$, где турбулентная вязкость минимальна

$$\nu_t = \frac{30}{A}\nu \simeq 12\nu,$$

т.е. $\nu_t \gg \nu$ внутри всего логарифмического подслоя.

Описанные подслои обычно объединяются в одну внутреннюю область, которая занимает порядка 20% толщины погранслоя и в которой генерируется около 80% всей энергии турбулентности. Важной особенностью внутренней области является слабая зависимость профиля скорости от числа Рейнольдса, продольного градиента давления и прочих внешних условий (которые, тем не менее, могут вызвать уменьшение толщины внутренней области или даже полное ее вырождение). Слабая зависимость профиля скорости от числа Рейнольдса является основой для построения пристенных функций, связывающих параметры течения с расстоянием от стенки.

В основе пристенных функций лежат следующие предположения:

1. Касательные напряжения во внутренней области $\tau_w = const$:

$$\tau_w = \rho u_* = \rho(\nu + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \approx \rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial y}.$$

2. Профиль скорости имеет вид

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln E \frac{yu_*}{\nu} = \frac{1}{\kappa} \ln E y^+,$$

где $(30 < y^+ < 100), y$ — расстояние от стенки.

3. Справедливо выражение (15.24)

$$\nu_t = C_D \frac{k^2}{\varepsilon}$$

4. Предполагается равенство диссипации и генерации кинетической энергии турбулентности

$$P_k = \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \approx \varepsilon.$$

Эти четыре зависимости связывают 5 переменных $(u, u_*, \nu_t, k, \varepsilon)$ и недостаточны для постановки граничных условий. Поэтому k в ближайшем узле сетки (находящимся в логарифмическом слое), находят из уравнения (15.21), полагая, что градиент k на стенке, в направлении нормали к ней, равен нулю.

Модель $k - \varepsilon$ создавалась для расчета течений со сложной структурой и отрывами [?]. На рис. 15.5 показаны результаты сравнения эксперимента и расчета турбулентного обтекания автомобиля [?] и видно их хорошее соответствие.

Обычно используется следующий набор констант:

$$\sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad c_1 = 1.44, \quad c_2 = 1.92, \quad C_D = 0.09.$$
 (15.29)



Рис. 15.5. Обтекание автомобиля: а — линии тока, б, в — распределение коэффициента статического давления C_P вдоль верхней и нижней стороны профиля: эксперимент (2) и расчет (1)

15.6 Другие модели турбулентности

Важным этапом развития моделей турбулентности с двумя дополнительными дифференциальными уравнениями, было создание модели $k-\omega$ [?] (со сходной структурой дополнительных дифференциальных уравнений, где $\omega = \sqrt{k}/L$ — частота турбулентных пульсаций), предназначенной для расчета пристенных течений и модели SST [?] — объединившей модели $k - \omega$ и $k - \varepsilon$ путем их суперпозиции и введения эмпирической весовой функции обеспечивающей расчет пристенных течений по модели $k - \omega$ и ядра потока — по модели $k - \varepsilon$.

Многочисленными исследованиями последнего времени было показано [?], что модель SST дает лучшее соответствие экспериментальным данным в задачах обтекания тел потоком жидкости, а также в тепловых расчетах [?].

Однако, при расчетах внутренних течений в гидромашинах, предпочтение отдается модели $k - \varepsilon$ [?], [?] или SA [?], хотя удовлетворительного согласия с экспериментальными данными удается получить только вблизи оптимальной подачи насосов. Типичный пример приведен на. рис. 15.6.



Рис. 15.6. Влияние модели турбулентности на расчетные характеристики насоса ЦНС63-1400 [?]

Опыт применения полуэмпирических моделей турбулентности, привел к пониманию того, что надежды на создание универсальной модели турбулентности пригодной для расчета всех или, по крайней мере, большинства турбулентных течений, едва ли осуществимы.

Поэтому все большее внимание уделяется подходам к моделированию турбулентности, базирующихся на первых принципах гидродинамики (методу прямого численного моделирования — в англоязычной литературе Direct Numerical Simulation или DNS и методу моделирования крупных вихрей — Large Eddy Simulation или LES).

1. Метод DNS. Единственное допущение, на котором базируется DNS, состоит в предположении, что уравнения Навье-Стокса адекватно описывают не только ламинарные, но и турбулентные течения. Поэтому, в рамках этого подхода, расчет турбулентных течений производится путем непосредственного (без какого-либо предварительного осреднения) численного решения нестационарных уравнений Навье-Стокса.

Поскольку пространственная сетка должна разрешить наиболее мелкие вихри, имеющие характерный размер порядка колмогоровского $\eta = (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}$ (см. (15.23)), то общее число ячеек будет порядка

$$\left(\frac{L_0}{\eta}\right)^3 \sim \left(\frac{L_0}{\nu u_*}\right)^{9/4} = Re^{9/4},$$

использовали (15.19): $\varepsilon \sim u_*^3/L_0$.

Шаг по времени также должен быть порядка колмогоровского $\tau_{\eta} = (\nu/\varepsilon)^{1/2}$. Если τ — время расчета, то число шагов по времени $\tau/\tau_{\eta} \sim Re^{1/2}$.

Поэтому необходимые вычислительные ресурсы на проведение DNS растут с ростом числа Рейнольдса как $Re^{11/4}.$

В DNS методе необходимо рассчитать все пространственно-временные масштабы турбулентного течения. Расчеты только нестационарные. Их трудоемкость быстро растет с увеличением числа Рейнольдса. В настоящее время такие расчеты применяются только в фундаментальных исследованиях для получения детальной информации о структуре и закономерностях турбулентности.

2. В методе LES используется универсальность спектра турбулентности в инерциальной области II, см. рис. 15.4: в любом развитом турбулентном течении имеется интервал масштабов, в котором справедлив закон $E \sim k^{-5/3}$. В LES выбирают масштаб Δ , примерно соответствующий середине области II. Вихри с размером большим Δ вычисляются точно.

Вихри с размерами меньшими Δ не вычисляются, а моделируются. Свойства этих вихрей примерно одинаковы для всех развитых турбулентных течений и не зависят от геометрии задачи и граничных условий. Уравнения Навье-Стокса дополняются моделью каскадной передачи энергии от крупных вихрей к мелким в пределах инерционного интервала волновых чисел [?].

Поскольку мелкомасштабная часть спектра моделируется, а не рассчитывается, ресурсы, необходимые для реализации LES, оказываются намного меньшими, чем для DNS. Так, для расчета турбулентности вдали от твердых стенок число ячеек сетки, увеличивается с ростом числа Рейнольдса пропорционально $Re^{0.4}$, а не $Re^{2.25}$, как в случае DNS. Однако вблизи стенок, где даже энергонесущие вихри имеют малые размеры, требования к сеткам для LES приближаются к аналогичным требованиям для DNS: число ячеек, необходимых для LES таких течений пропорционально $Re^{1.8}$.

3. Метод DES (моделирования отсоединенных вихрей — Detached-Eddy Simulation) или гибридный метод, возник в результате объединения RANS и LES подходов к моделированию турбулентности. В DES моделируются не все энергоронесущие пристеночные вихри, а только *отсоединенные* — которые заселяют отрывные зоны, а вихри в *присоединенных* участках пограничных слоев описываются RANS моделями. DES требует меньше ресурсов, чем LES, однако примерно на порядок более ресурсоемок, чем RANS. Поэтому, в настоящее время, применяется редко.

Из-за вычислительной трудоемкости подходов DNS и LES их пирокое использование при решения сложных задач гидродинамики может начаться лишь в конце нынешнего столетия. Данный вывод иллюстрирует таблица 15.1, заимствованная из работы [?], опубликованной в 2000 году. В таблице представлены оценки вычислительных ресурсов, необходимых для расчета обтекания типичного самолета или автомобиля (для расчетов газосепараторов требуются близкие ресурсы) с использованием всех известных методов расчета турбулентных течений. Данные этой таблицы для RANS основаны на реальном опыте использования соответствующих методов, имевшемся в 2000 г., а прогноз готовности методов DNS, LES и DES сделан на основе весьма оптимистичной оценки темпов роста производительности компьютеров (в два раза каждые пять лет).

Метод	Необходимое число	Необходимое число	Готовность
	узлов сетки	шагов по времени	
3D Steady RANS	10^{7}	10^{3}	1985
3D Unsteady RANS	10^{7}	$10^{3.5}$	1995
DES	10^{8}	10^{4}	2000
LES	$10^{11.5}$	$10^{6.7}$	2045
DNS	10^{16}	10 ^{7.7}	2080

Таблица 15.1. Вычислительные ресурсы и перспективы практического применения различных подходов к моделированию турбулентных течений [?]

16 Турбулентное течение многофазных жидкостей, модель Лагранжа

16.1 Расчет движения твердых частиц в шнеке и осевом колесе

Твердые частицы попадают в добываемую жидкость двумя путями: из пласта, при разрушении его каркаса, или формируются внутри скважины в виде продуктов коррозии скважинного оборудования (главным образом Fe₂O₃). Их типичная средняя массовая концентрация составляет от нескольких десятков милиграмм на литр, до 1 г/л, или от 0.001% до 0.1% мас.

Оценим среднее расстояние между частицами, считая монофракционным их распределение по размерам. Из определения массовой концентрации получаем

$$c_m = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_p}{\left(l^3 - \frac{4}{3}\pi r^3\right)\rho + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_p},$$

где ρ_p, ρ — плотность частиц и жидкости соответственно, r — радиус частицы, l — среднее расстояние между частицами. Откуда

$$\left(\frac{l}{r}\right)^3 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{(1-c_m)\rho_p}{c_m\rho} + 1\right).$$

При $c_m = 0.001\%$ среднее расстояние между частицам
и $l \sim 20r,$ при $c_m = 0.1\% - l \sim 5r.$

Выразим объемную концентрацию частиц через массовую

$$c_v = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\left(l^3 - \frac{4}{3}\pi r^3\right) + \frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{c_m}{1 - c_m}\frac{\rho}{\rho_p}$$

откуда следует, что $c_m = 0.1\%$ соответствует $c_v \simeq 0.04\%$. Согласно [?] движение твердых частиц в жидкости можно описывать моделью Лагранжа, без учета взаимодействия частиц друг с другом, при $c_v \leq 1\%$. Это означает, что для описания движения твердых частиц в скважинной жидкости во всех практически значимых условиях можно ограничиться применением только этой модели. Движение каждой твердой частицы описывается уравнениями Ньютона

$$m\frac{d\boldsymbol{U}}{dt} = \sum_{i} \boldsymbol{F}_{i},$$

 \boldsymbol{F}_i — силы, действующие на частицу. Перечислим эти силы и оценим их величины.

1. Сила сопротивления (с которой частица увлекается жидкостью) [?]:

$$\boldsymbol{F_x} = C_x \pi r^2 \rho \boldsymbol{w} \frac{|\boldsymbol{w}|}{2},$$

.

 C_x- коэффициент лобового сопротивления,
 r-радиус частицы, $\rho-$ плотность жидкости,
 ${\bm w}={\bm U}_{{\bm p}}-{\bm U}-$ разность скоростей частицы и жидкости.

2. Сила тяжести:

$$F_{g} = \rho_{p} V_{p} g,$$

 ρ_p — плотность частицы, V_p — объем частицы, ${\boldsymbol{g}}$ — ускорение свободного падения.
3. Сила Архимеда:

$$F_a = \rho V_p g.$$

4. Сила гидростатического давления окружающей частицу жидкости [?]:

$$-\oint p \cdot ds = -\oint \nabla p \cdot dV \simeq -\nabla p \cdot V = -\nabla p \frac{m_p}{\rho_p},$$

где воспользовались малостью размера частицы по сравнению с характерным масштабом неоднородности давления *p*.

5. Подъемная сила, действующая на частицу из-за неоднородности скорости жидкости [?]:

$$F_s = C_s \pi r^2 \sqrt{\frac{\mu \rho_p}{|\mathrm{rot}\, \boldsymbol{U}|}} \boldsymbol{w} imes \mathrm{rot}\, \boldsymbol{U},$$

константа $C_S = 0.01$ [?]).

6. Сила Магнуса, возникающая из-за вращения частицы в жидкости [?]:

$$\boldsymbol{F_m} = \frac{4}{3} C_m \pi r^3 \rho(\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{\omega_p}),$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{p}} = 2\pi f_p = \frac{1}{2} \mathrm{rot} \, \boldsymbol{U},$$

коэффициент $C_m = 2$, если частица вращается жидкостью без проскальзывания, в этом случае сила Магнуса принимает максимальное значение.

Оценим порядок этих сил при следующих типичных значениях параметров: $\rho \sim 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\rho_p \sim 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $r \sim 10^{-4} \text{ м}$, $g = 10 \text{ м/c}^2$, $\mu \sim 10^{-3} \text{ Па·с}$, $U_p \sim 1 \text{ м/c}$, $w \sim 0.5 U$ с.

Тогда получаем следующие оценки для сил:

- 1. сила сопротивления $F_c \sim 10^{-6}$ H, положили $C_x = 1$,
- 2. сила тяжести $\sim 10^{-7}$ H,
- 3. сила Архимеда ~ 10^{-7} H,
- 4. сила гидростатического давления ~ 10^{-8} H, при $|\nabla P| \sim 10^4 \text{ Па/м}$, поскольку газосепаратор создает давление ~ 10^4 Па , а типисная длина проточных каналов ~ 1 м,
- 5. подъемная сила $\sim 10^{-10}$ H,
- 6. сила Магнуса
 $\sim 10^{-8}$ Н, при $f_p \sim 1$ Гц.

Из приведенных оценок следует, что гидростатическим давлением, подъемной силой Магнуса можно пренебречь.

Теперь запишем уравнение движения частицы, учитывали "присоединенную" массу жидкости, т.е. жидкость увлекаемую движущейся частицей, которая создает дополнительную силу сопротивления, равную: $k \cdot \rho V d\boldsymbol{w}/dt$, где k – коэффициент, зависящий от формы частицы, для шара k = 0.5 [?]. Окончательно получаем:

$$\rho_p V \frac{d\boldsymbol{U}_p}{dt} = C_x S \rho \frac{\boldsymbol{w}|\boldsymbol{w}|}{2} + V \boldsymbol{g}(\rho_p - \rho) + \frac{1}{2} \rho V \left(\frac{d\boldsymbol{U}}{dt} - \frac{d\boldsymbol{U}_P}{dt}\right), \quad (16.1)$$



Рис. 16.1. Распределение частиц в проточных каналах серийного газосепаратора ГН5А-250

где $S = \pi r^2$.

В качестве примера было рассчитано движение твердых частиц в серийном газосепараторе ГН5А-250. Течение жидкости рассчитывали также, как в §1 этой главы. Движение частиц, по уравнению (16.1). Полученные результаты приведены на рис. 16.1. Видно, что твердые частицы распределены неоднородно по длине газосепаратора. Их локальная концентрация максимальна в верхней части шнека. В этой же области происходит гидроабразивное разрушение гильзы и корпуса газосепаратора [?]–[?].

Следовательно, можно предположить, что разрушение вызвано накоплением частиц и повышением их концентрации в области завихрения течения на выходе из шнека, где движение твердых частиц вдоль проточного канала замедляется.

17 Турбулентное течение многофазных жидкостей, модель Эйлера

17.1 Расчет течения газожидкостной смеси

Типичная конструкция серийных газосепараторов содержит напорных и сепарационный блоки. Напорный блок — это обычно шнек постоянного шага. Сепарационный — барабан с плоскими лопастями, ориентированными радиально. Между ними устанавливают осевое рабочее колесо, предназначенное для согласования потоков в шнеке и барабане.

Считается, что шнек прокачивает ГЖС вдоль барабана, в котором происходит ее сепарация за счет центробежных сил, возникающих благодаря вращению жидкости. Однако шнек вращается с той же угловой скоростью и также создает центробежные силы, а значит сепарирует ГЖС.

Оценим степень сепарации ГЖС шнеком, для чего проведем расчеты течения ГЖС средствами вычислительной гидродинамики.

Начнем с выбора модели гидродинамики газожидкостной смеси.

Типичный диаметр пузырьков газа в скважинных условиях составляет $d \sim 0.1-0.2$ мм. Газосепараторы применяются при концентрации газа $c \geq 20\%$ об. Поскольку

$$c = \frac{\pi d^3/6}{l^3},$$

то среднее расстояние между пузырьками

$$l = d\left(\frac{\pi}{6c}\right)^{1/3} \le 1.4d,$$

т.е. порядка и менее диаметра пузырька. Поэтому при расчете движения пузырьков газа в газосепараторах следует учитывать как взаимодействие пузырьков газа с потоком жидкости, так и друг с другом.

Для описания движения ГЖС применим модель Эйлера, т.е. будем описывать ГЖС как смесь двух непрерывных и взаимно проникающих фаз (газа и жидкости). Выбор такой модели означает, что мы будем считать размер пузырьков газа много меньше характерного размера течения l. Поскольку $d \sim 0.1$ –0.2 мм, а l порядка ширины проточного канала, т.е. $l \sim 1$ см, то это предположение выполняется.

Обозначим ρ_{α} — плотность фазы с номером α . Число фаз обозначим N_p . Объемную концентрацию α фазы обозначим r_{α} . Тогда масса α фазы в единице объема равна $r_{\alpha}\rho_{\alpha}$, а уравнение непрерывности имеет следующий вид [?]

$$\frac{\partial r_{\alpha}\rho_{\alpha}}{\partial t} + \nabla (r_{\alpha}\rho_{\alpha}\boldsymbol{u}_{\alpha}) = \sum_{\beta=1}^{N_{p}} \Gamma_{\alpha\beta}, \qquad (17.1)$$

 $\Gamma_{\alpha\beta}$ — плотность источников-стоков из-за фазового перехода $\beta \leftrightarrow \alpha$.

В ГЖС переход вещества между газом и жидкостью осуществляется путем растворения, т.е. по диффузионному механизму. Характерное время формирования диффузионной зоны $t \sim d^2/D$. В типичных скважинных условиях $d \sim 10^{-2}$ см, $D \sim 10^{-5}$ см²/с получаем $t \sim 10$ сек, т.е. при изменении, например температуры ГЖС, а значит и пределов растворимости компонент, достаточно $t \sim 10$ сек для установления равновесного распределения концентрации. Однако, в газосепараторах рабочая жидкость

практически не нагревается, а значит, не происходит перераспределение компонент и можно положить $\Gamma_{\alpha\beta} = 0.$

Кроме того, в газосепараторах практически не происходит сжатия ГЖС, поэтому $\rho_{\alpha}=const$ и из (17.1) следует

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{\rho_{\alpha}} \frac{\partial r_{\alpha} \rho_{\alpha}}{\partial t} + \sum_{\alpha} \frac{1}{\rho_{\alpha}} \nabla (r_{\alpha} \rho_{\alpha} \boldsymbol{u}_{\alpha}) = 0,$$

а, поскольку $\sum_{\alpha} r_{\alpha} = 1$, то

$$\sum_{\alpha} \nabla(r_{\alpha} \boldsymbol{u}_{\alpha}) = 0,$$

получаем более простой вид уравнения непрерывности.

Уравнения движения, или уравнения Ньютона, выписывают для каждой компоненты многофазной смеси. Так произведение массы на ускорение вещества α -ой фазы, заключенной в микрообъеме V равно:

$$\int_{V} r_{\alpha} \rho_{\alpha} \frac{d\boldsymbol{u}_{\alpha}}{dt}$$

Давление, действующее на α -фазу в выделенном микрообъеме V

$$-\oint r_{\alpha}p_{\alpha}d\boldsymbol{f} = \int_{V} \nabla(r_{\alpha}p_{\alpha})dV,$$

силы вязкого трения

$$\oint r_{\alpha}\sigma_{ij}^{(\alpha)}df_{j} = \int_{V} \frac{\partial r_{\alpha}\sigma_{ij}^{(\alpha)}}{\partial x_{j}}dV$$

для ньютоновой несжимаемой жидкости

$$\int_{V} \frac{\partial r_{\alpha} \sigma_{ij}^{(\alpha)}}{\partial x_{j}} dV = \int_{V} \frac{\partial}{\partial x_{j}} \left(\eta_{\alpha} r_{\alpha} \frac{\partial u_{i}^{(\alpha)}}{\partial x_{j}} \right) dV.$$

Поэтому уравнение движения имеет следующий вид:

$$r_{\alpha}\rho_{\alpha}\frac{d\boldsymbol{u}_{\alpha}}{dt} = r_{\alpha}\rho_{\alpha}\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}_{\alpha}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}_{\alpha}\nabla)\boldsymbol{u}_{\alpha}\right) = -\nabla(r_{\alpha}p_{\alpha}) + \nabla(\mu_{\alpha}r_{\alpha}\nabla\boldsymbol{u}_{\alpha}) + \boldsymbol{S}_{\alpha} + \boldsymbol{M}_{\alpha},$$

где ${m S}_{lpha}$ — плотность объемных сил, ${m M}_{lpha}$ — плотность сил межфазового взаимодействия.

Преобразуем правую часть уравнения движения, используя уравнение непрерывности

$$\begin{aligned} r_{\alpha}\rho_{\alpha}\frac{\partial u_{i}^{(\alpha)}}{\partial t} + r_{\alpha}\rho_{\alpha}u_{j}^{(\alpha)}\nabla_{j}u_{i}^{(\alpha)} &= \frac{\partial(r_{\alpha}\rho_{\alpha}u_{i}^{(\alpha)})}{\partial t} - u_{i}^{(\alpha)}\frac{\partial(r_{\alpha}\rho_{\alpha})}{\partial t} + r_{\alpha}\rho_{\alpha}u_{j}^{(\alpha)}\nabla_{j}u_{i}^{(\alpha)} = \\ &= \frac{\partial(r_{\alpha}\rho_{\alpha}u_{i}^{(\alpha)})}{\partial t} + u_{i}^{(\alpha)}\nabla_{j}(r_{\alpha}\rho_{\alpha}u_{j}^{(\alpha)}) - u_{i}^{(\alpha)}\sum_{\beta=1}^{N_{p}}\Gamma_{\alpha\beta} + r_{\alpha}\rho_{\alpha}u_{j}^{(\alpha)}\nabla_{j}u_{i}^{(\alpha)} = \\ &= \frac{\partial(r_{\alpha}\rho_{\alpha}u_{i}^{(\alpha)})}{\partial t} + \nabla_{j}(r_{\alpha}\rho_{\alpha}u_{i}^{(\alpha)}u_{j}^{(\alpha)}) - u_{i}^{(\alpha)}\sum_{\beta=1}^{N_{p}}\Gamma_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Поэтому уравнение движения можно переписать в следующем, обычно используемом [?], виде

$$\frac{\partial (r_{\alpha}\rho_{\alpha}\boldsymbol{u}_{\alpha})}{\partial t} + \nabla (r_{\alpha}\rho_{\alpha}\boldsymbol{u}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{u}_{\alpha}) = -\nabla (r_{\alpha}p_{\alpha}) + \nabla (\mu_{\alpha}r_{\alpha}\nabla\boldsymbol{u}_{\alpha}) + \boldsymbol{S}_{\alpha} + \boldsymbol{M}_{\alpha} - \boldsymbol{u}_{\alpha}\sum_{\beta=1}^{N_{p}}\Gamma_{\alpha\beta},$$

где $-u_{\alpha} \sum_{\beta=1}^{N_p} \Gamma_{\alpha\beta}$ — скорость изменения импульса единицы объема (плотность объемной силы), обусловленная фазовыми переходами $\alpha \leftrightarrow \beta$. Обычно эту силу записывают в следующем виде

$$-oldsymbol{u}_lpha\sum_{eta=1}^{N_p}\Gamma_{lphaeta}=\sum_{eta=1}^{N_p}\left(oldsymbol{u}_eta\Gamma_{lphaeta}^+-oldsymbol{u}_lpha\Gamma_{etalpha}^+
ight),$$

первое слагаемое описывает скорость изменения импульса единицы объема из-за перехода $\beta \to \alpha$, второе — из-за перехода $\alpha \to \beta$.

Итак, для описания движения N_p -фазной жидкости мы имеем $3N_p$ уравнений движения, N_p уравнений непрерывности и условие $\sum_{\alpha=1}^{N_p} r_{\alpha} = 1$. Всего $4N_p + 1$ уравнений.

В них входят $u_{\alpha} - 3N_p$ неизвестных, а также r_{α} и p_{α} — еще $2N_p$. Всего получается $5N_p$ неизвестных, т.е неизвестных больше, чем уравнений. Поэтому вводят дополнительные условия: $p_{\alpha} = p$ для всех фаз, т.е. еще $N_p - 1$ уравнение.

Теперь число уравнений $4N_p + 1 + (N_p - 1) = 5N_p$ и равно числу неизвестных.

Поэтому для ньютоновских жидкостей, с учетом несжимаемости и отсутствия изменения фазового состава ГЖС в процессе протекания внутри газосепаратора, система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\sum_{\alpha=1}^{N_p} \nabla(r_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha) = 0 \tag{17.2}$$

$$\frac{\partial (r_{\alpha}\rho_{\alpha}\boldsymbol{u}_{\alpha})}{\partial t} + \nabla (r_{\alpha}\rho_{\alpha}\boldsymbol{u}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{u}_{\alpha}) = -\nabla (r_{\alpha}p) + \nabla (\mu_{\alpha}r_{\alpha}\nabla\boldsymbol{u}_{\alpha}) + \boldsymbol{S}_{\alpha} + \boldsymbol{M}_{\alpha}.$$
(17.3)

Поскольку газосепараторы рассчитываются исключительно во вращающейся системе отсчета, то плотность объемных сил равна сумме силы тяжести и корриолисовой силы:

$$oldsymbol{S}_{lpha} = \left(
ho_{lpha} - \langle
ho
ight) \left(oldsymbol{g} + 2oldsymbol{u}_{lpha} imes oldsymbol{\Omega}
ight), \quad \langle
ho
angle = \sum_{lpha=1}^{N_p} r_{lpha}
ho_{lpha},$$

где учтена также сила Архимеда, возникающая из-за того, что средняя плотность многофазной жидкости $\langle \rho \rangle$ может отличаться от плотности отдельных фаз ρ_{α} .

В силе межфазного взаимодействия учитывается целый ряд эффектов [?]:

$$oldsymbol{M}_{lpha} = \sum_{eta=1}^{N_p} oldsymbol{M}_{lphaeta}, \qquad oldsymbol{M}_{lphaeta} = oldsymbol{M}_{lphaeta}^D + oldsymbol{M}_{lphaeta}^{LUB} + oldsymbol{M}_{lphaeta}^L + oldsymbol{M}_{lphaeta}^{VM} + oldsymbol{M}_{lphaeta}^{TD},$$

где

• $M^{D}_{\alpha\beta}$ — сила гидродинамического сопротивления, вызванная относительным перемещением фаз;

- *M*^{LUB}_{αβ} сила направленная перпендикулярно перемещению пузырька газа, возникающая из-за его вращения (эффект Магнуса [?]), учитываться не будет (обоснование будет дано ниже, в §4этой главы);
- *M*^L_{αβ} сила, действующая на пузырьки газа движущиеся вблизи стенки проточного канала (направлена от стенки и локализована в слое шириной не более 5d_β [?], что много меньше ширины проточного канала газосепаратора), учитываться не будет;
- *M*^{VM}_{\alpha\beta} сила, обусловленная "присоединенной" массой жидкости, увлекаемой движущимся пузырьком;
- $M_{\alpha\beta}^{TD}$ описывает перемещения пузырьков, вызванное турбулентным перемешиванием.

В настоящее время не предложены общие закономерности для сил межфазного взаимодействия и используются эмпирические зависимости. Вид этих зависимостей был предложен в рамках модели частиц. Ее основная идея состоит в том, что одну из фаз (β) считают дискретной, другую (α) непрерывной.

В газосепараторах дискретная фаза — это обычно пузырьки газа. Поскольку, как в стендовых, так и эксплуатационных условиях диаметр пузырьков не более 0.1–0.2 мм, то они сохраняют сферическую форму при движении. Поэтому выбор модели частиц в которой все частицы имеют сферическую форму и одинаковый размер, представляется разумным.

В эмпирических выражениях для сил межфазных взаимодействий фигурирует удельная площадь межфазной поверхности $A_{\alpha\beta}$, которая в модели частиц равна $A_{\alpha\beta} = \pi d_{\beta}^2/l^3$. Поскольку $r_{\beta} = \pi d_{\beta}^3/6l^3$, то

$$A_{\alpha\beta} = \frac{6r_{\beta}}{d_{\beta}}.$$
(17.4)

В [?] рекомендуется использовать модель частиц для $r_{\beta} < 0.8$.

Обобщением модели частиц является модель смеси в которой α и β фазы фигурируют симметричным образом

$$A_{\alpha\beta} = \frac{6r_{\alpha}r_{\beta}}{d_{\alpha\beta}} = \frac{6r_{\alpha}r_{\beta}}{r_{\alpha}d_{\beta} + r_{\beta}d_{\alpha}}.$$
(17.5)

Видно, что при $r_{\alpha}d_{\beta} \gg r_{\beta}d_{\alpha}$ (17.5) переходит в (17.4).

Теперь мы можем записать эмпирические выражения для сил межфазных взаимодействий. Начнем с гидродинамического сопротивления, вызванного относительным перемещением фаз. Силу, действующую на одну частицу дисперсной фазы, обычно записывают так [?]:

$$\boldsymbol{D}_p = rac{1}{2} C_D \rho_{\alpha} A_p | \boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha} | (\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}),$$

на все частицы дисперсной фазы, находящиеся в единице объема:

$$\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}^{D} = n_{p}\boldsymbol{D}_{p} = \frac{6r_{\beta}}{\pi d_{\beta}^{3}} \frac{1}{2}C_{D}\rho_{\alpha}\frac{\pi d_{\beta}^{2}}{4} |\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}|(\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}) = \\ = \frac{C_{D}}{8}\frac{6r_{\beta}}{d_{\beta}}\rho_{\alpha}|\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}|(\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}) = \frac{1}{8}C_{D}A_{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta}|\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}|(\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}) = \\ = \frac{C_{D}}{8}\frac{6r_{\beta}}{d_{\beta}}\rho_{\alpha}|\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}|(\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}) = \frac{1}{8}C_{D}A_{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta}|\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}|(\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}) = \\ = \frac{C_{D}}{8}\frac{6r_{\beta}}{d_{\beta}}\rho_{\alpha}|\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}|(\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}) = \frac{1}{8}C_{D}A_{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta}|\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}|(\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}) = \\ = \frac{C_{D}}{8}\frac{6r_{\beta}}{d_{\beta}}\rho_{\alpha}|\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}|(\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}) = \frac{1}{8}C_{D}A_{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta}|\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}|(\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}) = \\ = \frac{C_{D}}{8}\frac{6r_{\beta}}{d_{\beta}}\rho_{\alpha}|\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}|(\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha})|\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}|(\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha})|\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}|(\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha})|\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}|\boldsymbol{U}_{\beta}|\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}|\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}|\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}|\boldsymbol{U}_{\beta}|\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}|\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}|$$

$$= C_{\alpha\beta} (\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha}),$$

где было учтено, что

$$A_p = \frac{\pi d_{\beta}^2}{4}, \quad V_p = \frac{\pi d_{\beta}^3}{6}, \quad n_p = \frac{r_{\beta}}{V_p} = \frac{6r_{\beta}}{\pi d_{\beta}^3}.$$

Коэффициент гидродинамического сопротивления C_D является безразмерной функцией числа Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho_{\alpha\beta} | \boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha} | d_{\beta}}{(\mu_{\alpha} r_{\alpha} + \mu_{\beta} r_{\beta})}$$

В ламинарном режиме, Re < 1:

$$C_D = \frac{24}{Re}$$

В турбулентном, когда $r_{\beta} \ll 1$ и можно считать, что пузырьки не взаимодействуют друг с другом:

$$C_D = \max\left[\frac{24}{Re}\left(1+0.15Re^{0.687}\right), 0.44\right].$$

Если взаимодействием пузырьков пренебречь нельзя, то

$$C_D = r_{\alpha}^{-1.65} \max\left[\frac{24}{Re'} \left(1 + 0.15Re'^{0.687}\right), 0.44\right], \quad Re' = r_{\alpha}Re.$$

Влияние "присоединенной массы жидкости пропорционально ускорению относительного перемещения фаз [?]

$$\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}^{VM} = -\boldsymbol{M}_{\beta\alpha}^{VM} = r_{\beta}\rho_{\alpha}C_{VM}\left(\frac{d\boldsymbol{U}_{\beta}}{dt} - \frac{d\boldsymbol{U}_{\alpha}}{dt} + 2\Omega \times (\boldsymbol{U}_{\beta} - \boldsymbol{U}_{\alpha})\right),$$

где Ω — угловая скорость вращения системы координат, $C_{VM} = 0.5$, если можно считать, что влиянием вязкости можно пренебречь.

Плотность сил турбулентного перемешивания аппроксимируется следующим выражением [?]

$$\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}^{TD} = -\boldsymbol{M}_{\beta\alpha}^{TD} = C_{\alpha\beta} \frac{\nu_{t\alpha}}{\sigma_{t\alpha}} \left(\frac{\nabla r_{\beta}}{r_{\beta}} - \frac{\nabla r_{\alpha}}{r_{\alpha}} \right),$$

где $\nu_{t\alpha}$ — турбулентная вязкость непрерывной α -фазы, $\sigma_{t\alpha} = 0.9$ — турбулентное число Шмидта, коэффициент $C_{\alpha\beta}$ был определен выше.

Из проведенного анализа теории течения многофазных смесей видно, что характер течения во многом определяется законами взаимодействия фаз, и что в настоящее время для их описания получены только полуэмпирические зависимости. Однако, как показали наши расчеты течения ГЖС в типичном серийном газосепараторе ГП5А-250, результаты расчетов качественно верно описывают течение газожидкостной смеси.

18 Теплопередача в вязких жидкостях

18.1 Диссипация энергии в вязкой жидкости

В идеальной жидкости закон сохранения энергии имел следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = -\nabla \left[\rho \boldsymbol{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right], \quad w = \varepsilon + \frac{p}{\rho},$$
$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) dV = -\oint \rho \boldsymbol{v} \left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon \right) d\boldsymbol{f} - \oint \boldsymbol{v} p \, d\boldsymbol{f}, \quad (18.1)$$

 ε — внутренняя энергия единицы объема, w — энтальпия единицы объема. Первое слагаемое в правой части (18.1) описывает поток энергии переносимый жидкостью вытекающей из выделенного объема через поверхность, второе слагаемое — это работа, производимая в единицу времени силами давления, действующими в жидкости, над жидкостью которая окружает выделенный объем.

В вязкой жидкости закон сохранения энергии имеет следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = -\nabla_k \left[\rho v_k \left(\frac{v_i^2}{2} + w \right) - v_i \sigma'_{ik} - \lambda \nabla_k T \right] = \\ = -\nabla_k \left[\rho v_k \left(\frac{v_i^2}{2} + \varepsilon \right) + v_i p - v_i \sigma'_{ik} - \lambda \nabla_k T \right],$$
(18.2)

где *T* — температура, *λ* — теплоемкость жидкости.

Слагаемые в круглых скобках в левой части уравнения — полная энергия жидкости: кинетическая плюс внутренняя.

Слагаемые в квадратных скобках в правой части уравнения — плотность потока энергии, который складывается из энергии (кинетической и внутренней) переносимой жидкостью, это первое слагаемое. Оно такое же, как в идеальной жидкости.

Второе и третье слагаемое — это работа в единицу времени, производимая жидкостью на границе ее соприкосновения с окружающей жидкостью. По определению она равна произведению скорости v_i на силу f_i .

Силу dF_i создаем та часть плотности потока импульса $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + \delta_{ik} p - \sigma'_{ik}$, которая определяет силы, действующие на границе, это $\pi_{ik} = \delta_{ik} p - \sigma'_{ik}$. Тогда из закона сохранения импульса

$$\int f_i \, dV = \int \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} \, dV = -\oint \pi_{ik} \, dS_k, \quad \rightarrow \quad dF_i = f_i \, dV = -\pi_{ik} \, dS_k,$$
$$\int v_i \, dF_i = -\oint \pi_{ik} \, dS_k = -\oint (v_i p - v_i \sigma'_{ik}) \, dS_k.$$

Четвертое слагаемое — это плотность потока тепла $\boldsymbol{q} = -\lambda \nabla T$, переносимого по механизму теплопроводности в неравномерно нагретой жидкости. В общем случае \boldsymbol{q} является функцией от ∇T . Когда градиенты температуры ∇T малы, то раскладывая эту функцию в ряд Тейлора, получаем $\boldsymbol{q} = -\lambda \nabla T$.

18.2 Уравнение переноса тепла

Уравнение (18.2) можно преобразовать к следующему виду

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + v_i \nabla_i s\right) = \rho T \frac{ds}{dt} = \sigma'_{ik} \nabla_k v_i + \nabla_i (\lambda \nabla_i T), \qquad (18.3)$$

которое будем называть общим уравнением переноса тепла.

Кратко опишем последовательность преобразований от (18.2) к (18.3):

- 1. Вычислим производные по времени в левой части (18.2).
- 2. В полученное выражение подставим $\partial_t \rho$ и $\partial_t v_i$ из уравнений непрерывности и Навье–Стокса.
- 3. Для вычисления $\partial_t \varepsilon$ воспользуемся термодинамическим тождеством $d\varepsilon = Tds + (p/\rho)d\rho$.
- 4. Исключим ε согласно $\varepsilon = w p/\rho$.
- 5. Исключим ∇p , используя $dw = Tds + dp/\rho$, т.е. $\nabla p = \rho \nabla w \rho T \nabla s$.

Если жидкость несжимаема, а коэффициенты η и λ можно считать константами, то уравнение (18.3) существенно упрощается. Во-первых

$$\sigma'_{ik}\nabla_k v_i = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2.$$

Во-вторых, левую часть (18.3) можно записать так

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \rho \frac{dQ}{dt} = \rho c_p \frac{dT}{dt},$$

где Q — тепло, полученное единицей массы, c_p — теплоемкость единицы массы (теплоемкость взяли при постоянном давлении, поскольку обычно при нагревании жидкости ничто не препятствует ее расширению). Уравнение переноса тепла принимает следующий вид

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (v_k \nabla_k)T = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2c_p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2, \quad \chi = \frac{\lambda}{\rho c_p}, \tag{18.4}$$

 χ называют коэффициентом температуропроводности.

18.3 Закон подобия

Пусть неоднородность температуры жидкости мала на столько, что ν и χ можно считать константами. Также пусть неоднородность температуры жидкости велика по сравнению с нагревом жидкости за счет внутреннего трения. Тогда вторым слагаемым в правой части уравнения (18.4) можно пренебречь

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)T = \chi \Delta T.$$

Если ограничиться стационарными течениями, то полная система уравнений будет иметь следующий вид

$$(\boldsymbol{v}\nabla)T = \chi\Delta T, \quad (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla\frac{p}{\rho} + \nu\Delta\boldsymbol{v}, \quad \nabla\boldsymbol{v} = 0,$$

решением которой являются следующие функции: $T, v, p/\rho$.

Через ГУ решение зависит от следующих характеристик: характерной длины L, скорости U и характерной разности температур жидкости и твердых стенок $T_1 - T_0$. Единица измерения температуры может быть выбрана произвольно, т.к. T входит в обе стороны уравнение теплопроводности линейно. Будем измерять температуру в градусах.

Выберем следующие единицы: длины L, скорости U, давления ρU^2 , тогда

$$(\boldsymbol{v}\nabla)T = \frac{\chi}{UL}\Delta T = \frac{1}{A}\Delta T, \quad (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + \frac{\nu}{UL}\Delta \boldsymbol{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\Delta \boldsymbol{v}, \quad \nabla \boldsymbol{v} = 0,$$

где $A = UL/\chi$, $Re = UL/\nu$.

Решение данной задачи можно записать в следующем виде

$$\frac{T-T_0}{T_1-T_0} = f_1\left(\frac{\boldsymbol{r}}{L}, Re, A\right) = f_2\left(\frac{\boldsymbol{r}}{L}, Re, \frac{A}{Re}\right) = f_2\left(\frac{\boldsymbol{r}}{L}, Re, Pr\right), \quad Pr = \frac{A}{Re} = \frac{\nu}{\chi},$$
$$\frac{\boldsymbol{v}}{U} = \boldsymbol{g}_1\left(\frac{\boldsymbol{r}}{L}, Re, A\right) = \boldsymbol{g}_2\left(\frac{\boldsymbol{r}}{L}, Re, \frac{A}{Re}\right) = \boldsymbol{g}_2\left(\frac{\boldsymbol{r}}{L}, Re, Pr\right),$$

Плотность потока тепла на границе твердое тело – жидкость обычно записывают в виде: $q = \alpha(T_1 - T_0)$, где α — коэффициент теплопередачи, который зависит от полей температуры и скорости.

Используя методы теории подобия, можно записать

$$Nu = \frac{\alpha L}{\lambda} = f(Re, Pr).$$

Если $Re \ll 1$, то уравнение теплопроводности $\Delta T = 0$ и T не зависит от \boldsymbol{v} . Поэтому α не зависит от \boldsymbol{v} и ν , т.е. $\alpha = const$. Значит Nu = const.

18.4 Свободная конвекция

Механическое равновесие в жидкости возможно, если T(z). Если T является функцией и других координат, то равновесие невозможно. Однако для равновесия не достаточно, чтобы ∇T был направлен вниз, нужно, чтобы он был больше определенного критического значения.

Когда механическое равновесие невозможно, возникает течение жидкости, которое выравнивает неоднородность температуры. Такое течение называется свободной конвекцией.

Выведем уравнение описывающее свободную конвекцию, для чего примем следующие допущения:

- 1. жидкость несжимаема $\rho = const(p);$
- 2. $T = T_0 + T', T' \ll T_0;$
- 3. $\rho(T) = \rho(T_0 + T') = \rho_0 \rho_0 \beta T', \ \beta = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p > 0;$

4. $p_0 = \rho_0 gr + const$, т.е. учитываем гидростатическое давление, но пренебрегаем изменением плотности из-за гидростатического давления.

Преобразуем уравнение Навье-Стокса

$$\partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \nabla) \boldsymbol{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}.$$

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\nabla (p+p')}{\rho_0 + \rho'} = \frac{\nabla p_0}{\rho_0} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} - \frac{\nabla p_0}{\rho_0^2} \rho' = \boldsymbol{g} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} + \boldsymbol{g}\beta T',$$

т.к. $p_0 = \rho_0 \boldsymbol{gr}, \, \rho' = -\rho_0 \beta T'$. Опуская индекс у ρ_0 , получим

$$\partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \nabla) \boldsymbol{v} = -\nabla \frac{p'}{\rho} + \nu \Delta \boldsymbol{v} - \boldsymbol{g} \beta T'$$

Преобразуем уравнения теплопроводности и непрерывности

$$\partial_t T' + (\boldsymbol{v}\nabla)T' = \chi \Delta T', \quad \nabla \boldsymbol{v} = 0.$$

Поэтому стационарное течение описывает следующая система уравнений

$$(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla \frac{p'}{\rho} + \nu \Delta \boldsymbol{v} - \boldsymbol{g}\beta T'.$$

 $(\boldsymbol{v}\nabla)T' = \chi \Delta T',$
 $\nabla \boldsymbol{v} = 0.$

Которая позволяет вычислить следующие функции: $v, p'/\rho, T'$ и содержит параметры: ν, χ, g, β , а через ГУ еще и: характерную длину h, характерную разность температур θ .

Ведем масштаб скорости $\sqrt{\nu\chi}/h$ и давления $\rho\nu\chi/h^2$, тогда система уравнений примет вид

$$(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p' + \sqrt{Pr}\Delta\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\gamma}RaT', \quad Ra = \frac{g\beta h^{3}\theta}{\nu\chi}.$$

 $(\boldsymbol{v}\nabla)T' = \frac{1}{\sqrt{Pr}}\Delta T',$
 $\nabla \boldsymbol{v} = 0.$

Закон подобия

$$\boldsymbol{v} = \frac{\sqrt{\nu\chi}}{h} \boldsymbol{f}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{h}, Ra, Pr\right), \quad T' = \theta g\left(\frac{\boldsymbol{r}}{h}, Ra, Pr\right).$$

18.5 Задания для самостоятельной работы

1. Получить уравнение (18.3) из (18.2). Вычислим

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \varepsilon \right) = \frac{v^2}{2} \partial_t \rho + \rho \boldsymbol{v} \partial_t \boldsymbol{v} + \rho \partial_t \varepsilon + \varepsilon \partial_t \rho.$$

Воспользуемся уравнением непрерывности

$$\partial_t = -\nabla(\rho \boldsymbol{v}),$$

уравнением Навье-Стокса

$$\rho \partial_t \boldsymbol{v} = -\rho(\boldsymbol{v} \nabla) \boldsymbol{v} - \nabla p + \nabla_k \sigma'_{ik},$$

и термодинамическим тождеством

$$d\varepsilon = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho, \quad \partial_t \varepsilon = T\partial_t s + \frac{p}{\rho^2}\partial_t \rho = T\partial_t s - \frac{p}{\rho^2}\nabla(\rho \boldsymbol{v}).$$

Тогда

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{v^2}{2}\nabla(\rho \boldsymbol{v}) - \rho(\boldsymbol{v}\nabla)\frac{v^2}{2} - \boldsymbol{v}\nabla p + v_i\sigma'_{ik} + \rho T\partial_t\varepsilon - \frac{p}{\rho}\nabla(\rho \boldsymbol{v}) - \varepsilon\nabla(\rho \boldsymbol{v}) = \\ = -\left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)\nabla(\rho \boldsymbol{v}) - \rho(\boldsymbol{v}\nabla)\frac{v^2}{2} - \boldsymbol{v}\nabla p + \rho T\partial_t s + v_i\sigma'_{ik}.$$

Снова используем термодинамические тождества

$$\begin{split} w &= \varepsilon + \frac{p}{\rho}, \\ dw &= Tds + \frac{dp}{\rho}, \quad dp = \rho dw - \rho Tds, \\ \nabla p &= \rho \nabla w - \rho T \nabla s, \quad -\boldsymbol{v} \nabla p = -\boldsymbol{v} \rho \nabla w + \rho T(\boldsymbol{v} \nabla) s. \end{split}$$

Получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= -\left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\right) \nabla(\rho \boldsymbol{v}) - \rho(\boldsymbol{v}\nabla) \frac{v^2}{2} - \boldsymbol{v}\rho\nabla w + \rho T(\boldsymbol{v}\nabla)s + \rho T\partial_t s + v_i \sigma'_{ik} = \\ &= -\nabla \left[\rho \boldsymbol{v} \left(\frac{v^2}{2} + w\right)\right] + \rho T \frac{ds}{dt} + v_i \sigma'_{ik} = \\ &= -\nabla \left[\rho \boldsymbol{v} \left(\frac{v^2}{2} + w\right) - v_i \sigma'_{ik}\right] + \rho T \frac{ds}{dt} - \sigma'_{ik} \nabla_k v_i. \end{aligned}$$

Прибавляем и вычитаем $abla(\lambda \nabla T)$ в правую часть уравнения

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla \left[\rho \boldsymbol{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - v_i \sigma'_{ik} - \lambda \nabla T \right] + \rho T \frac{ds}{dt} - \sigma'_{ik} \nabla_k v_i - \nabla (\lambda \nabla T).$$

Сравнивая с (18.2), получаем (18.3).

2. В жидкость с заданным постоянным градиентом температуры $\nabla T = vecB$ погружен шар радиусом *R*. Коэффициенты теплопроводности жидкости и шара равны соответственно λ_0 и λ_1 . Найти поле температур в системе жидкость + шар.

$$T_0 = \left[1 + rac{\lambda_0 - \lambda_1}{2\lambda_0 + \lambda_1} \left(rac{R}{r}
ight)^3
ight] oldsymbol{Br}, \quad T_1 = rac{3\lambda_0}{\lambda_1 + 2\lambda_0} oldsymbol{Br}.$$

3. Определить поле температуры в жидкости, текущей по круглой трубе радиусом *R*, температура стенки которой постоянна и равна *T*₀.

$$T = T_0 + \langle v \rangle^2 \frac{\nu}{\chi c_p} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4 \right].$$

4. По трубе кругового сечения с осью ОZ течет жидкость, удовлетворяющая условиям: она подчиняется уравнению состояния идеального газа ρ = mP/T (m — масса молекулы), ее температура T = const, и вязкость ν не зависит от давления. Найти p(z), при условии, что p(0) = p₀ и расход газа равен Q.

$$p(z) = \sqrt{p_0^2 + \frac{16\eta QT}{\pi m R^4} z}.$$

5. Решить одномерное уравнение диффузии в бесконечной однородной среде от точечного мгновенного источника единичной мощности $s(x,t) = \delta(x)\delta(t)$.

$$u(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\nu t}\right).$$

6. Частицы совершают броуновское движение в жидкости, заполняющей пространство x > 0. Частицы, достигшие поверхности стенки x = 0, прилипают к ней. Найти вероятность того, что частица, находившаяся в момент времени t = 0 в точке x₀ > 0, в момент времени t окажется на стенке.

$$w(t) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\mathbf{x}_0}{2\sqrt{\mathrm{Dt}}}\right).$$

7. Найти закон эволюции плотности вещества совершающего одномерную диффузию. Начальное распределение $\rho(x, 0) = \alpha \exp(-\beta x^2), \alpha, \beta > 0$, коэффициент диффузии — D.

$$\rho(x,t) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+4\beta Dt}} \exp\left(-\frac{\beta x^2}{1+4\beta Dt}\right).$$

8. Показать, что наличие силы *F*, "подгоняющей"диффундирующую вдоль оси ОХ частицу в каком-то (например, положительном) направлении, приводит диффузионное уравнение к виду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - 2\gamma D \frac{\partial F \rho}{\partial x}.$$

9. Показать, что стационарное уравнение Навье-Стокса допускает решения диффузионного типа. Получить это решение.

$$v_z = \frac{const}{4\pi Dz} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4Dz}\right).$$

10. В вязкой среде вихри испытывают диффузию. Найти закон расплывания *z*-проекции вектора *q* вихря, первоначально находящегося на оси OZ.

$$q_z(r,t) = \frac{\Gamma}{8\pi\nu t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right),$$

ν — коэффициент диффузии, Γ — постоянная.

11. В условиях предыдущей задачи найти поле скоростей.

$$v_{\varphi} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right].$$

19 Магнитная гидродинамика

19.1 Уравнения Максвелла в среде

Уравнения Максвелла в вакууме были получены как обобщение опытных данных и имеют следующий вид

$$\nabla \boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \quad \nabla \boldsymbol{H} = 0.$$

Вещество изменяет как электрическое, так и магнитное поле. Изменяются и уравнения Максвелла. Покажем (конспективно) как изменятся уравнения Максвелла.

1. При неоднородной поляризации диэлектрика появляются поляризационные заряды $\rho_{\text{пол}} = -\nabla P$, $P = \sum_{a} e_{a} r_{a}$ — дипольный момент единицы объема

$$\nabla \boldsymbol{E} = 4\pi(\rho_{\text{пол}} + \rho_{\text{ст}}) = 4\pi(-\nabla \boldsymbol{P} + \rho_{\text{ст}}),$$
$$\nabla(\boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}) = 4\pi\rho_{\text{ст}}, \quad \rightarrow \quad \nabla \boldsymbol{D} = 4\pi\rho_{\text{ст}},$$

здесь $E = \langle e \rangle$ — среднее значение микроскопического электрического поля (среднее по микрообъему).

В слабых полях $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}) = \varepsilon \boldsymbol{E}$, разложили $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E})$ в ряд Тейлора.

2.

$$abla imes oldsymbol{E} = -rac{1}{c} rac{\partial oldsymbol{B}}{\partial t}, \quad oldsymbol{B} = \langle oldsymbol{h}
angle$$

B — среднее значение микроскопического магнитного поля h.

3.

$$\nabla \boldsymbol{B} = 0.$$

4.

$$abla imes oldsymbol{h} \mathbf{h} = rac{4\pi}{c} oldsymbol{j} + rac{1}{c} rac{\partial oldsymbol{e}}{\partial t}, \quad
ightarrow \quad
abla imes oldsymbol{B} = rac{4\pi}{c} (oldsymbol{j}_{\text{пол}} + oldsymbol{j}_{\text{маг}} + oldsymbol{j}_{\text{пров}}) + rac{1}{c} rac{\partial oldsymbol{E}}{\partial t}, \\ oldsymbol{j}_{\text{пол}} = \sum_{a} e_{a} oldsymbol{v}_{a} = rac{\partial}{\partial t} \sum_{a} e_{a} oldsymbol{r}_{a} = rac{\partial oldsymbol{P}}{\partial t}, \\ oldsymbol{j}_{\text{маг}} = c
abla imes oldsymbol{M},
onumber$$

М — магнитный момент единицы объема. Итак:

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c} c \nabla \times \boldsymbol{M} + \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}_{\text{пров}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P} \right),$$
$$\nabla \times \left(\boldsymbol{B} - 4\pi \boldsymbol{M} \right) = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}_{\text{пров}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P} \right),$$
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}_{\text{пров}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - 4\pi \boldsymbol{M}.$$

В слабых полях $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi \boldsymbol{M}(\boldsymbol{B}) = \mu \boldsymbol{H}.$

Система уравнений Максвелла в среде

$$\nabla \boldsymbol{D} = 4\pi \rho_{\rm cr}, \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P} = \varepsilon \boldsymbol{E},$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$
$$\nabla \boldsymbol{B} = 0,$$

$$abla imes oldsymbol{H} = rac{4\pi}{c} oldsymbol{j}_{ ext{пров}} + rac{1}{c} rac{\partial oldsymbol{D}}{\partial t}, \quad oldsymbol{H} = oldsymbol{B} - 4\pi oldsymbol{M} = rac{oldsymbol{B}}{\mu}.$$

19.2 Система уравнений магнитной гидродинамики

Если жидкость обладает проводимостью и движется в магнитном поле, то ее течение будет в значительной степени определяться взаимодействием между полем и индуцированными токами. Магнитное поле тормозит движение проводников и проводящей среды, поскольку кинетическая энергия механического движения преобразуется в энергию индуцированного электрического тока. Выведем уравнения описывающие течение проводящей жидкости в магнитном поле.

Будем считать жидкость несжимаемой, тогда уравнение непрерывности имеет следующий вид

$$\boldsymbol{v}=0.$$

В уравнении Навье–Стокса учтем силу, действующую со стороны поля на индуцированный в жидкости ток. Величина этой силы, действующей на единицу объема жидкости, равна (на заряд e действует сила Лоренца $e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}/c$, в единице объема n зарядов, а сила $en\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}/c$)

$$\frac{1}{c}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H},$$

где H — напряженность магнитного поля, j = env — плотность тока, связанная с напряженностями электрического и магнитного поля H и E законом Ома

$$\boldsymbol{j} = \sigma \left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H} \right), \qquad (19.1)$$

 σ — электропроводность жидкости.

Запишем уравнения Максвелла в среде, пренебрегая током смещения и полагая $\mu=1$

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \\ \nabla \boldsymbol{H} &= 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{H} &= \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}, \\ \nabla (\varepsilon \boldsymbol{E}) &= 4\pi \rho_e, \end{aligned}$$

 ε — диэлектрическая проницаемость жидкости, ρ_e — объемная плотность возникающего в жидкости заряда. Применяя к обеим сторонам (19.1) операцию $\nabla \times$ и использую уравнения Максвелла, получим

$$\nabla \times \boldsymbol{j} = \sigma \nabla \times \left[\boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H} \right],$$
$$\frac{c}{4\pi} \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{H}) = -\frac{\sigma}{c} \left[\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}) \right],$$

поскольку

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \nabla (\nabla \boldsymbol{H} - \nabla^2 \boldsymbol{H} = -\nabla^2 \boldsymbol{H},$$

использовали тождество

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}),$$

окончательно

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}) = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \boldsymbol{H}.$$

Это уравнение позволяет найти магнитное поле H, если известно поле скоростей v.

В неподвижной жидкости это уравнение имеет вид уравнения диффузии

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = D_m \nabla^2 \boldsymbol{H}, \quad D_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}.$$

Толщина диффузионного слоя, т.е. глубина на которую проникло поле в вещество, оценивается так

$$h \sim \sqrt{D_m t}$$

В случае периодического поля с частотой ω время $t \sim 1/\omega$ и $h_{\omega} \sim c/\sqrt{4\pi\sigma\omega}$. Поэтому переменный ток течет в проводнике лишь в приповерхностном слое h_{ω} (скин-слое). Чем больше σ и ω , тем сильнее эффект и слабее диффузия поля.

В идеально проводящей жидкости $\sigma = \infty$

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}),$$

т.е. получаем уравнение тождественное уравнению для завихренности ω в идеальной несжимаемой жидкости. Следовательно, в этом случае силовые линии H жестко связаны со средой и движутся вместе с жидкостью. Говорят, что магнитное поле "вморожено" в вещество. Действительно, если бы идеально проводящая жидкость пересекала при своем движении силовые линии магнитного поля, то возбуждаемая ЭДС приводила бы к бесконечному току, что невозможно.

Теперь запишем уравнение Навье–Стокса, также для несжимаемой жидкости

$$rac{\partialoldsymbol{v}}{\partial t}+(oldsymbol{v}
abla)oldsymbol{v}=-rac{1}{
ho}
abla p+
u
abla^2oldsymbol{v}+rac{1}{
ho c}oldsymbol{j} imesoldsymbol{H}.$$

Используя уравнения Максвелла, преобразуем последнее слагаемое в правой части

$$\frac{1}{\rho c}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi\rho} (\nabla \times \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{H} = -\frac{1}{8\pi\rho} \nabla^2 \boldsymbol{H}^2 + \frac{1}{4\pi\rho} (\boldsymbol{H} \nabla) \boldsymbol{H},$$

тогда

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla\left(p + \frac{\boldsymbol{H}^2}{8\pi}\right)\nu\nabla^2\boldsymbol{v} + \frac{1}{4\pi\rho}(\boldsymbol{H}\nabla)\boldsymbol{H}$$

Запишем полную систему уравнений гидродинамики несжимаемой проводящей жидкости в виде, содержащем кроме гидродинамических величин, только лишь напряженность магнитного поля **H**

$$\begin{split} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} &= -\frac{1}{\rho}\nabla\left(p + \frac{\boldsymbol{H}^2}{8\pi}\right)\nu\nabla^2\boldsymbol{v} + \frac{1}{4\pi\rho}(\boldsymbol{H}\nabla)\boldsymbol{H},\\ &\qquad \qquad \frac{\partial T}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)T = \chi\nabla^2 T,\\ &\qquad \qquad \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{H} - (\boldsymbol{H}\nabla)\boldsymbol{v} = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla^2\boldsymbol{H},\\ &\qquad \qquad \nabla \boldsymbol{v} = 0, \quad \nabla \boldsymbol{H} = 0. \end{split}$$

19.3 Течение Пуазейля (Гартмана)

В качестве примера применения уравнений магнитной гидродинамики (МГД) рассмотрим течение проводящей жидкости с $\mu = 1$ между параллельными пластинами. Выберем ось X в направлении течения, а магнитное поле пусть направлено перпендикулярно потоку в направлении Y.

Из симметрии задачи следует

$$v = [v_x(y), 0, 0],$$

 $H = (H_x, H_0, 0),$

появилась компонента поля H_x , т.к. жидкость "тянет"за собой силовые линии.

$$\boldsymbol{j} = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H}\right) = (0, 0, j), \quad \boldsymbol{j} = \sigma\left(E_0 + \frac{vH_0}{c}\right),$$

где мы допускаем возможность приложения внешнего поля $\boldsymbol{E} = (0, 0, E_0).$

Для v_x из уравнения Навье–Стокса

$$rac{\partial oldsymbol{v}}{\partial t} + (oldsymbol{v}
abla)oldsymbol{v} = -rac{1}{
ho}
abla p +
u
abla^2 oldsymbol{v} + rac{1}{
ho c}oldsymbol{j} imes oldsymbol{H}$$

получим

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\sigma}{c} \left(E_0 + \frac{vH_0}{c} \right) H_0$$

Продифференцировав уравнение Навье–Стокса по $\partial/\partial x$, получим

$$\nabla \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x} = const.$$

Итак, уравнение для v

$$\frac{d^2v}{dy^2} - \frac{\sigma H_0^2}{\mu c^2} v = \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\sigma E_0 H_0}{c}\right) \frac{1}{\mu}, \quad v(y = \pm h) = 0.$$

Введем безразмерную координату $y^\prime: y=hy^\prime,$ а затем опустим штрих при y

$$\frac{d^2v}{dy^2} - M^2v = \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\sigma E_0 H_0}{c}\right)\frac{h^2}{\mu}, \quad M^2 = \frac{\sigma H_0^2 h^2}{\mu c^2},$$

М — число Гартмана, равное отношению магнитной силы к вязкой

$$M = \frac{F_H}{F_\eta} = \frac{\sigma H_0^2 v/c^2}{\eta v/h^2}.$$

Решение полученного уравнения имеет следующий вид

$$v = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\sigma E_0 H_0}{c}\right) \frac{c^2}{\sigma H_0^2} \left[1 - \frac{\operatorname{ch}(My/h)}{\operatorname{ch} M}\right].$$

На течение можно влиять изменяя $\partial p/\partial x$ и E_0 .

При $M\ll 1$

$$v = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\sigma E_0 H_0}{c}\right) \frac{h^2}{2\eta} \left[1 - \frac{y^2}{h^2}\right].$$

При $M \gg 1$

$$v = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\sigma E_0 H_0}{c}\right) \frac{c^2}{\sigma H_0^2} \left[1 - e^{M\frac{1-|y|}{h}}\right]$$

поле скоростей v(y) практически однородно, за исключением погранслоя $\delta \sim h/M$ вблизи стенок.

Поле H_x найдем из уравнения Максвелла

$$abla imes oldsymbol{H} = rac{4\pi}{c} oldsymbol{j}, \quad
ightarrow \quad rac{\partial H_x}{\partial y} = -rac{4\pi}{c} j_z,$$
 $rac{dH_x}{dy} = -rac{4\pi}{c} \sigma \left(E_0 + rac{H_0}{c} v(y)
ight).$

19.4 Задания для самостоятельной работы

1. Рассчитать стационарное течение проводящей жидкости между двумя плоскопараллельными пластинами, одна из которых покоится, а другая движется в своей плоскости со скоростью v_0 (течение Куэтта). Внешнее магнитное поле H_0 направлено перпендикулярно плоскости пластин.

$$v(y) = v_0 \frac{\operatorname{sh}[M(y+d)/d]}{\operatorname{sh} 2M}.$$

2. Рассчитать течение Гартмана в предположении, что по оси *z* канал ограничен идеально проводящими параллельными стенками, отстоящими друг от друга на расстоянии, много большем расстояния *d* между пластинами.

Выражение для v(y) будет тем же, но поле E_0 нельзя считать произвольным. Уго величину найдем из условия равенства нулю полного тока, перпендикулярного идеально проводящим стенкам

$$\int_{-d}^{d} j_z \, dy = \int_{-d}^{d} \sigma(E_0 + vH_0/c) \, dy =$$
$$= \frac{2d}{M} \left[\sigma E_0 \operatorname{th} M - \frac{c}{H_0} \frac{\partial p}{\partial x} (M - \operatorname{th} m) \right] = 0,$$

откуда

$$E_0 = \frac{c}{\sigma H_0} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{M - \operatorname{th} M}{\operatorname{th} M},$$

$$v(y) = -\frac{c^2}{\sigma H_0^2} \frac{\partial p}{\partial x} M \frac{\operatorname{ch} M - \operatorname{ch}(My/d)}{\operatorname{sh} M}.$$

- 3. Найти безразмерные параметры, характеризующие движение проводящей жидкости в магнитном поле.
- 4. МГД волны в несжимаемой жидкости (волны Альвена)
- 5.
- 6.

20 Другие модели гидродинамики вязких жидкостей

20.1 Тепло- и массоперенос в пористых средах

20.1.1 Уравнение однофазной фильтрации

Фильтрацией называют течение жидкости в пористой среде.

Примером такой фильтрации является движение нефти в пласте. Обычно нефть залегает в местах поднятий пластов. Сверху и снизу нефти находятся непроницаемые породы: глины, соли.

Как правило пласт образуют терригенные или карбонатные породы. Терригенные породы (песок) имеют поры $d \sim 1 - 10$ мкм. Карбонатные (известняк) имеют большую неоднородность пор по размерам, вторичные пустоты: трещины и каналы растворения породы водой, длина которых $L \gg d$.

Типичные размеры задачи о фильтрации нефти:

- диаметр скважины 10–20 см, расстояние между скважинами $\sim 10^2$ м;
- толщина пласта $\sim 1 10$ м, протяженность $\sim 10 100$ км.

Цель исследования фильтрации: создание качественных и количественных моделей, устойчивых к вариации исходных данных (которые обычно известны с низкой точностью).

Система уравнений, описывающих движение жидкости в пористых средах, включает следующие законы:

- 1. закон сохранения массы;
- 2. закон сохранения импульса, это уравнение Навье–Стокса, которое принимает вид закона Дарси;
- 3. закон сохранения энергии, используется при описании неизотермических течений;
- 4. уравнения состояния жидкости и каркаса пласта.

Макроскопическую скорость фильтрации обозначим u и определим ее как объемный расход жидкости через единичную площадку в пористой среде. Скорость фильтрации связана со средней скоростью частиц жидкости в порах v следующим соотношением

$$\boldsymbol{u}=m\boldsymbol{v},$$

т — пористость (отношение объема пор к объему выделенного элемента среды).

Закон сохранения массы

$$\frac{\partial m\rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{u} = q,$$

 $m\rho$ — масса жидкости в единице объема пласта (m
— пористость), q
— плотность источников (q>0) и стоков (q<0) жидкости внутри пласта.

Закон сохранения импульса Уравнение движения жидкости, т.е. уравнение Дарси, можно получить осреднением уравнения Навье-Стокса или методами теории подобия.

Исходным является уравнения Навье-Стокса:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \rho(\mathbf{f'}_{fr} + \mathbf{f}),$$

где **v** — истинная скорость жидкости внутри пор, **f** — плотность объемных сил, например **g** для силы тяжести, $\mathbf{f'}_{fr}$ — плотность сил трения жидкости с поверхностью пор.

Осредним уравнение Навье-Стокса:

1. перейдем от истинной скорости движения жидкости v к средней скорости фильтрации u = mv (в пластовых условиях пористость $m \sim 0.1$ –0.2), тогда

$$\rho\left(\frac{1}{m}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{m^2}(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}\right) = -\nabla p + \frac{\eta}{m}\nabla^2\mathbf{u} + \rho(\mathbf{f}_{fr} + \mathbf{f});$$

- 2. будем считать
 - $\partial \mathbf{u} / \partial t$ мало, т.е. течение близко к стационарному;
 - $(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}$ мало, т.к. мала средняя скорость фильтрации \mathbf{u} ;
 - трение между частицами жидкости $\eta \nabla^2 \mathbf{u}$ мала по сравнению с трением жидкости о стенки пор;
 - будем считать, что трение жидкости о стенки пор описывается законом трения Ньютона $\mathbf{f}_{fr} = -(\nu/k) \boldsymbol{u}, k$ коэффициент проницаемости, $[k] = L^2$;

3. тогда

$$-\nabla p + \rho \left(-\frac{\nu}{k}\mathbf{u} + \mathbf{f}\right) = 0,$$

и справедлив закон Дарси:

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu}\nabla p + \rho \frac{k}{\mu}\mathbf{f} = -\frac{k}{\mu}\nabla p + \frac{k}{\nu}\mathbf{f}.$$

Теперь получим закон Дарси методом теории подобия. Размерные величины: диаметр пор $d, \mu, \rho, \mathbf{u}, \nabla p, m$. Запишем выражение для градиента давления:

$$abla p = -rac{\mu}{d^2} f(Re,m), \quad Re = rac{ud}{
u}.$$

Если скорость фильтрации **u** мала, а значит, мало число Рейнольдса, то раскладывая в ряд по числу Рейнольдса и ограничиваясь первым членом разложения, получим:

$$\nabla p = -\frac{\mu}{d^2} f(m) \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = -\frac{d^2}{\mu f(m)} \nabla p = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \quad k = \frac{d^2}{f(m)},$$

откуда видно, что проницаемость k чисто геометрическая характеристика пористого каркаса. Этот линейный закон выполняется для насыпных сред при $Re \leq 0.1 - 1.0$.

При больших скоростях фильтрации в разложении функции f(Re, m) в ряд по Re следует сохранить квадратичный член, тогда:

$$-\frac{k}{\mu}\nabla p = \mathbf{u} + \beta \frac{\sqrt{k}}{\mu} |\mathbf{u}| \mathbf{u},$$

этот закон фильтрации справедлив для насыпных сред при $Re \leq 10 - 100$. Согласно экспериментальным данным при таких Re нет флуктуаций скорости во времени. Это ламинарное течение. Отсутствие линейной зависимости ∇p и **u** обусловлено криволинейностью проточных каналов. В прямолинейных трубах всегда выполняется линейная зависимость.

Чаще всего применяются следующие нелинейные законы фильтрации.

• Выведенный выше, он был предложен Форхгеймером:

$$\nabla p = -\frac{\mu}{k}\mathbf{u} - \beta \frac{\rho}{\sqrt{k}} |\mathbf{u}| \mathbf{u}.$$

• А также степенной закон:

$$\mathbf{u} = c |\nabla p|^{\frac{1-n}{n}} \nabla p.$$

Коэффициент проницаемости Коэффициент проницаемости обычно оценивают по модели Козени-Кармана, полученной на основе аналогии между пористой редой и системой параллельных трубок:

$$k = K \frac{m^3}{F^2},$$

К — безразмерная константа определяемая по опытным данным, *F* — удельная поверхность связанных (сообщающихся) пор. Выведем это выражение.

Пусть поровые каналы представляют собой параллельные трубки диаметра d = 2R.

Ламинарное течение в одной трубке описывается уравнением Пуазейля:

$$Q_M = \frac{\pi \Delta p}{8\nu L} R^4 = \rho \pi R^2 v, \quad \frac{\Delta p}{L} = 32\eta \frac{v}{d^2}.$$

Поскольку u = mv, а диаметр трубы можно выразить через ее удельный объем V/V_0 и удельную площадь боковой поверхности F/V_0 (V_0 — объем образца, содержащего единственную трубку)

$$d = 4\frac{V}{F} = 4\frac{\pi R^2 L}{2\pi RL} = 2R,$$

то

$$\frac{\Delta p}{L} = 32\eta \frac{u}{md^2} = 2\eta \frac{u}{m} \frac{F^2}{V^2}.$$

Если V_0 единичный объем, то V = m и

$$\frac{\Delta p}{L} = 2\eta \frac{u}{m} \frac{F^2}{m^2},$$

И

$$-\nabla p = \frac{\eta}{k} \mathbf{u} = \frac{2F^2}{m^3} \eta \mathbf{u}, \quad k = \frac{1}{2} \frac{m^3}{F^2},$$

т.е. если все поры цилиндрические каналы одного размера, то K = 0.5.

Уравнение однофазной фильтрации Объединяя закон сохранения массы и импульса, получаем:

$$\frac{\partial m\rho}{\partial t} = \nabla \frac{k}{\nu} \nabla p - \nabla \frac{k}{\nu} \rho \mathbf{f}.$$

Запишем уравнение в наиболее интересных частных случаях в отсутствии объемных сил, т.е. при $\mathbf{f} = 0$:

$$\frac{\partial m\rho}{\partial t} = \nabla \left(\frac{k}{\mu}\rho\nabla p\right).$$

- 1. $\{\rho, m, k, \nu\} = const.$ $\nabla^2 p = 0.$
- 2. Сжимаемая жидкость в недеформируемой пористой среде: $\rho(p), \{m, k, \mu\} = const$

$$m\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{k}{\mu}\nabla\rho\nabla p.$$

Введем новую переменную: $\nabla P = \rho \nabla p$. Поскольку зависимость $\rho(p)$ задана, то

$$P = \int^{p} \rho(p) \cdot dp, \quad \to \quad m \frac{\partial \rho(p)}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \nabla^{2} P(p),$$

полученное уравнение нужно решать относительно $p(t, \mathbf{r})$.

3. Уравнение для давления при упругом режиме фильтрации, когда $\{m, \rho, k, \mu\} = f(p)$. Если зависимость от давления слабая:

$$f(p) = f_0[1 + \beta_f(p - p_0)], \quad \beta_f \delta p \ll 1,$$

то

$$m_0 \rho_0 (\beta_\rho + \beta_m) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\rho_0 k_0}{\mu_0} \nabla \left[1 + (\beta_\rho + \beta_k - \beta_\mu) (p - p_0) \right] \nabla p =$$
$$= \frac{\rho_0 k_0}{\mu_0} \left[\nabla^2 p + (\beta_\rho + \beta_k - \beta_\mu) (\nabla p)^2 \right].$$

Поскольку $abla^2 p \sim \delta p/L^2$, а $\beta_f \delta p \ll 1$, то $\beta_f (
abla p)^2 \sim \beta_f \delta p^2/L^2 \ll \delta p/L^2$ и

$$m_0 \rho_0 (\beta_\rho + \beta_m) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\rho_0 k_0}{\mu_0} \nabla^2 p,$$
$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \nabla^2 p, \quad \kappa = \frac{k_0}{m_0 \mu_0} (\beta_m + \beta_\rho)^{-1},$$

 $\kappa-$ коэффициент пьезопроводности.

Поле скоростей находим из уравнения Дарси:

$$\boldsymbol{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla p.$$

20.1.2 Уравнение переноса тепла

Количество тепла, поглощаемого в единице объема пористой среды равно потоку тепла через границы этого объема

$$(\rho c_p)_c \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \boldsymbol{q},$$

 $(\rho c_p)_c$ — теплоемкость единицы объема насыщенной жидкостью среды, ${\pmb q}$ — плотность теплового потока

$$\boldsymbol{q} = -\lambda_c \nabla T + (\rho c_p)_{\mathsf{ss}} \boldsymbol{u} T,$$

где первое слагаемое — тепловой поток в среде, второе — конвективный поток, обусловленный фильтрацией жидкости. Поэтому уравнение переноса тепла имеет следующий вид

$$(\rho c_p)_c \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c_p)_{\mathbf{x}} \boldsymbol{u} \nabla T = \lambda_c \nabla^2 T.$$

20.2 Неньютоновские жидкости

В большинстве задач механики жидкостей используют линейный закон связи тензора вязких напряжений σ'_{ik} и тензора скоростей сдвига e_{ik}

$$\sigma'_{ik} = \eta e_{ik}, \quad e_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i},$$

где $\eta = const$. Такие жидкости называют ньютоновыми.

Однако, известно немало жидкостей для которых η является функцией e_{ik} , точнее инвариантов тензора e_{ik} , если жидкость изотропная. Для несжимаемой жидкости это

$$I_1 = e_i i = 0, \quad I_2 = \frac{1}{2} e_{ik} e_{ik}, \quad I_3 = det e_{ik}.$$

Не будем учитывать зависимость η от предыстории формирования течения, т.е. от времени. Если градиенты скорости малы, то $I_3 \ll I_2$, поэтому будем считать, что

$$\sigma_{ik}' = \eta I_2 e_{ik},$$

а для одномерных течений

$$\tau = \tau(\dot{\gamma}), \quad \dot{\gamma} = \frac{\partial v}{\partial z},$$

z — поперечная координата.

Согласно принятой в настоящее время классификации, неньютоновские жидкости делят, в зависимости от формы кривой $\tau(\dot{\gamma})$, на следующие группы, см. рис. 20.1, где

- 1. дилатантная жидкость;
- 2. ньютоновская жидкость;
- 3. псевдопластичная жидкость;
- 4. нелинейная вязкопластичная жидкость с предельным напряжением сдвига;
- 5. линейная вязкопластичная жидкость (бингамовская).

Функции аппроксимирующие кривые 1–5 на рис. 20.1 подбирают так, чтобы



- они хорошо аппроксимировали опытные данные;
- содержали минимальное число независимых констант;
- в пределе давали реологическое уравнение Ньютона.

Для аппроксимации реологии дилатантных и псевдопластичных жидкостей применяют зависимости

$$\tau = k |\dot{\gamma}|^{n-1} \dot{\gamma}, \quad \tau = \eta_0 (1 + k |\dot{\gamma}|)^{n-1} \dot{\gamma},$$

n < 1 для дилатантных и *n* > 1 для псевдопластичных.

Модель Бингама имеет следующий вид

$$au = au_0 sign(\dot{\gamma}) + \eta_p \dot{\gamma}, \quad \text{при} \quad |\tau| > au_0,$$

 $\dot{\gamma} = 0, \quad \text{при} \quad |\tau| \le au_0,$

при $|\tau| > \tau_0$ имеет место вязкопластичное течение, при $|\tau| \le \tau_0$ жидкость движется как твердое тело.

Все приведенные модели могут быть аппроксимированы моделью Уильямсона

$$\tau = \left(\frac{A}{B + |\dot{\gamma}|} + \eta_{\infty}\right)\dot{\gamma},$$

для плоскопараллельного течения, а для произвольного

$$\sigma'_{ik} = \left(\frac{A}{B + \sqrt{I_2}} + \eta_\infty\right) e_{ik}.$$

20.3 Смеси неограниченно растворимых компонент

Ограничимся рассмотрением 2-х компонентных смесей состав которых будем задавать массовой концентрацией более легкой компоненты (концентрация равна отношению массы легкой компоненты к полной массе жидкости в данном микрообъеме).

Состояние движения определяется следующими величинами: скоростью v, давлением p, температурой T и концентрацией c. Изменение концентрации осуществляется двумя механизмами: перемещением микрообъема жидкости как целого и молекулярным перемешиванием или диффузией. Полная система уравнений содержит уравнение сохранения массы (уравнение непрерывности), уравнение Навье-Стокса, уравнение диффузии (уравнение сохранения массы компонент смеси) и уравнение сохранения энергии (уравнение теплопроводности).

Уравнение непрерывности имеет обычный вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \boldsymbol{v}) = 0,$$

v — скорость жидкости одинакова для обоих компонент, нет проскальзования одной компоненты относительно другой.

Уравнение Навье-Стокса также имеет обычный вид

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}\right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{g}$$

Уравнение диффузии

Если диффузии нет, то при перемещении микрообъема его концентрация не меняется

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)c = 0.$$

Получим уравнение сохранения массы для компоненты смеси:

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} = \rho \frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho(\boldsymbol{v}\nabla)c - c\nabla(\rho\boldsymbol{v}) = -\nabla(c\rho\boldsymbol{v}),$$

т.е.

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \nabla(c\rho \boldsymbol{v}) = 0.$$

Если диффузия есть, то

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \nabla(c\rho \boldsymbol{v}) = -\nabla \boldsymbol{j},$$

j — диффузионный поток легкой компоненты смеси (выражение для диффузионного потока будет получено позже). Это уравнение диффузии.

Полный поток первой или легкой компоненты $j_1 = c\rho v + j$. Первой и второй $j_1 + j_2 = \rho v$. Следовательно $j_2 = \rho v - j_1 = (1 - c)\rho v - j$.

Уравнение диффузии можно преобразовать к другому виду, успользуя уравнение непрерывности

$$-\nabla(c\rho\boldsymbol{v}) - \nabla\boldsymbol{j} = \frac{\partial(\rho c)}{\partial t} = \rho \frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \frac{\partial c}{\partial t} - c \nabla(\rho \boldsymbol{v}),$$

откуда

$$\rho\left(\frac{\partial c}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)c\right) = -\nabla \boldsymbol{j}.$$

Уравнение теплопроводности

Это уравнение, как и раньше, получим из закона сохранения энергии. При выводе используется закон сохранения энергии макроскопических систем (первое начало термодинамики). Ранее мы считали, что микрообъемы жидкости не обмениваются молекулами и писали, для единицы массы жидкости

$$d\varepsilon = Tds - pdV$$

В смеси микрообъемы обмениваются атомами, поэтому

$$d\varepsilon = Tds - pdV + \mu_1 dN_1 + \mu_2 dN_2,$$

 μ_1, μ_2 — химические потенциалы компонент смеси (энергия, переносимая одной молекулой).

Поскольку $m_1N_1 + m_2N_2 = 1, m_1, m_2$ — массы одной молекулы смеси, N_1, N_2 — число молекул компонент смеси в единице массы жидкости. Тогда

$$c = \frac{m_1 N_1}{m_1 N_1 + m_2 N_2} = m_1 N_1, \quad \to \quad dN_1 = \frac{dc}{m_1}.$$

Поскольку $m_1 dN_1 + m_2 dN_2 = 0$, то

$$dN_2 = -\frac{m_1}{m_2}dN_1 = -\frac{dc}{m_2}.$$

Первое начало термодинамики принимает следующий вид

$$d\varepsilon = Tds - pdV + \mu_1 dN_1 + \mu_2 dN_2 = Tds - pdV + \left(\frac{\mu_1}{m_1} - \frac{\mu_2}{m_2}\right) dc = Tds - pdV + \mu dc,$$
(20.1)

 $\mu-$ эффективный химический потенциал смеси.

Переходим к выводу уравнения теплопроводности для смеси из закона сохранения энергии. Вывод основан на вычислении частной производной от плотности энергии единицы объема жидкости и преобразовании полученного выражения к сумме дивергенция некоторого вектора A (плотности потока энергии) плюс другие слагаемые B

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = -\nabla \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}.$$

Поскольку согласно закона сохранения энергии скорость изменения плотности энергии должна определяться только потоком энергии, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon\right) dv = -\int \nabla \boldsymbol{A} \, dV = -\oint \boldsymbol{A} \, d\boldsymbol{f},$$

то $\boldsymbol{B} = 0$. При вычислении \boldsymbol{B} используется первое начало термодинамики, которое для смеси (в отличии от однородных систем) содержит дополнительное слагаемое μdc

$$d\varepsilon = Tds - pdv + \mu dc = Tds - pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + \mu dc = Tds - pdv + \mu dc = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho + \mu dc,$$

где ε — плотность внутренней энергии единицы массы смеси.

При вычислении производной $\rho \partial \varepsilon / \partial t$ получим дополнительное слагаемое $\rho \mu \partial c / \partial t$. А при вычислении $\rho v \partial v / \partial t$ сначала, применив уравнение Навье–Стокса, получаем $-v \nabla p$, а затем используя

$$dw = Tds + dp/\rho + \mu dc,$$

а точнее

$$dp = -\rho dw - \rho T ds - \rho \mu dc,$$

получаем дополнительное слагаемое $\rho \mu \boldsymbol{v} \nabla c$.

Следовательно к полученному ранее при выводе уравнения теплопроводности для однородной жидкости выражению

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = -\nabla \left[\rho \boldsymbol{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - v_i \sigma'_{ik} + \boldsymbol{q} \right] + \rho T \frac{ds}{dt} - \sigma'_{ik} \nabla_k v_i + \nabla \boldsymbol{q},$$

нужно добавить в правую часть

$$\rho\mu\left(\frac{\partial c}{\partial t}+\boldsymbol{v}\nabla c\right)=-\mu\nabla\boldsymbol{j}.$$

Тогда из $\boldsymbol{B} = 0$ получим

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \sigma'_{ik} \nabla_k v_i - \nabla \boldsymbol{q} + \mu \nabla \boldsymbol{j}.$$

Поскольку

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \rho \frac{dQ}{dt} = \rho c_p \frac{dT}{dt},$$

где Q — тепло, полученное единицей массы, c_p — теплоемкость единицы массы (теплоемкость взяли при постоянном давлении, поскольку обычно при нагревании жидкости ничто не препятствует ее расширению). Уравнение переноса тепла принимает следующий вид

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (v_k \nabla_k) T \right) = \sigma'_{ik} \nabla_k v_i - \nabla \boldsymbol{q} + \mu \nabla \boldsymbol{j}, \qquad (20.2)$$

или пренебрегая диссипацией тепла из-за внутреннего трения

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (v_k \nabla_k) T \right) = -\nabla \boldsymbol{q} + \mu \nabla \boldsymbol{j}, \qquad (20.3)$$